استخدام الدوال غير الخطية في تسعير عقد التأمين على الحياة الجماعي - مدخل إكتواري جديد -

د. وجيه عبد الله فهمي مصطفى(*)

الملخص

بينما هناك اتجاه متزايد للتوسع في إنشاء المشروعات الصناعية والتجارية والخدمية الخاصة في مصر والتي تستوعب الكثير من الأيدي العاملة ، ويكون صاحب العمل هو المسئول عن تعويض هؤلاء أو ذويهم عند تحقق خطر الوفاة لأي منهم ، وبالتالي يستطيع صاحب العمل نقل هذا الخطر إلى شركة التأمين بمقتضى عقد تأمين مؤقت جماعي مقابل قسط مناسب . ومن الملاحظ أن هذا النوع من التأمين يأخذ اتجاها تصاعديا – في معظم الدول المتقدمة في صناعة التأمين – من حيث الحجم والأهمية ، أما في السوق المصرية فإن هذا النوع من التأمين لا يلقى أي اهتمام يذكر ، سواء من حيث الترويج له أو من حيث عمل تعريفة مناسبة له . وفي هذه الورقة يتم تقديم مدخل إكتواري جديد يعتمد على استخدام الدوال غير الخطية ونظريات الجذور المشهورة لتحديد قيمة القسط الذي يعظم أرباح المؤمن .

(*) الأستاذ المساعد بقسم الرياضة والتأمين – كلية التجارة – جامعة القاهرة

wbarakat2003@hotmail.com , wbarakat2003@yahoo.com

مقدمـــــة

يقوم صاحب العمل عادة بتقديم التأمين على الحياة المؤقت الجماعي الاختياري إلى مجموعة العاملين أو المستخدمين لديه . ومن المفترض أن هؤلاء العاملين سوف يتعرضون لخطر الوفاة تدريجيا وطبقا لنموذج وفاة معين ، وبالرغم من أن معدلات الوفاة لهؤلاء مختلفة ، ولكنها تعود إلى توزيع احتمالي معين مشترك . وللتقليل من تأثير الاختيار المضاد المحتمل ***adverse selection*** ضد مصالح شركة التأمين، فإن المؤمن يقوم عادةً بوضع حد أقصى مقبول لمعدلات الوفاة q^M ، ثم يقوم بعملية اكتتاب في الخطر المقدم له بعد دراسة طبية صحية لهؤلاء ـ قد تكون مكلفة إلى حد كبير ـ بغرض معرفة مستوي الوفاة المقدم له q . فإذا كانت $q > q^M$ فإن شركة التأمين ترفض هذه التغطية ، إلا إذا كان هذا التأمين مدعوم من جهة أخرى كالدولة مثلا . ويرى البعض أنه يمكن استخدام النظرية الاقتصادية لتقدير دالة الطلب الكلية على هذا النوع من التأمين لتحديد كل من الحد الأقصى لمعدلات الوفاة ولقسط التأمين واللذان يحددان مستوى أرباح المؤمن المتوقعة .

مشكلة البحث

من النظرة العامة لطرق تسعير التأمين التقليدية نجد أن هناك عيب ظاهر وهو ضعف الأساس الاقتصادي الذي على أساسه يتم تحديد قيمة القسط التجاري G . وبالرغم من إن الإكتواريون يعلمون تماما أن سعر التوازن لأي سلعة يتحدد عند تقاطع منحنى العرض مع منحنى الطلب ***laws of supply and demand*** . لذا ظهر اتجاه جديد تزعمه ***Lange*** سنة ١٩٩٦ ينادي فيه الإكتواريين بضرورة الأخذ بمبادئ النظرية الاقتصادية عند تسعير التأمين . فعدم وجود أساس اقتصادي واضح لتسعير التأمين كان مصدر النقد الأول طويل المدى لنظرية تسعير التأمين . وقد ناقش كل من ***Hickman and Miller*** سنة ١٩٧٠ ، ***Chalke*** سنة ١٩٩١ ،

Kliger and Levikson سنة ١٩٩٨ ، النقد الرئيسي لطرق تسعير التأمين التقليدية[1].

وردا على هذا العيب قام *Chalke* سنة ١٩٩١ بتطوير نظرية جديدة أطلق عليها «مدخل التسعير الكلي» *macro-pricing approach* لتسعير منتجات تأمينات الحياة . ويعتمد مدخل *Chalke* على اختيار « أفضل » دوال الطلب الفردية مستندة إلى توقعات الأقسام الإكتوارية والتسويقية بشركة التأمين على الحياة لعدة نقاط على منحنى الطلب لتحديد الأسعار « المثالية » .

أيضا قام كل من *Kliger and Levikson* سنة ١٩٩٨ بتقديم وجهة نظر أكثر توافقا مع النظرية الاقتصادية التقليدية ، فقد اعتبرا هؤلاء أن هناك مجموعة من الأشخاص عددهم N شخص مستقلين بعضهم عن بعض ، تم توزيعهم إلى مجموعات متجانسة جدا من حيث درجة الخطر المحتملة ، وبالتالي إمكانية استخدام دالة طلبهم على تأمينات الحياة في تقدير قيمة القسط " المثالية " لكل مؤمن له لتعظيم أرباح المؤمن المتوقعة ، وذلك تحت شرط أو قيد وهو القدرة على الوفاء *solvency* . وفي هذه الورقة سوف نتعرض بالتفصيل لهذا المنهج عند تسعير منتج التأمين المؤقت الجماعي الاختياري .

---

(١) يمكن الرجوع بالتفصيل لكل من :

- J.T. Lange, Application of a mathematical concept of risk in property-liability insurance ratemaking, *Journal of Risk and Insurance* 36 (1969) (4), pp. 383–391.
- J.C. Hickman and R.B. Miller, Insurance premiums and decision analysis, *Journal of Risk and Insurance* 37 (1970) (4), pp. 567–578.
- S.A. Chalke, Macro pricing: a comprehensive product development process, *Transactions of the Society of Actuaries* 33 (1991), pp. 137–194.
- D. Kliger and B. Levikson, Pricing insurance contracts–an economic viewpoint, *Insurance: Mathematics and Economics* 22 (1998), pp. 243–249.

أهمية البحث

بينما يأخذ سوق التأمين الجماعي اتجاها تصاعديا – في معظم الدول المتقدمة في صناعة التأمين – من حيث الحجم والأهمية ، إلا أنه مازالت تستخدم شركات التأمين المصرية المقدمة لهذا النوع من التأمين الأساليب التقليدية في تسعير منتجاتها . ويستمد ذلك البحث أهميته من ازدياد حاجة شركات التأمين على الحياة المصرية إلى تعريفة مستمدة من الخبرة الفعلية والمشاهدات العملية للمجتمع محل الدراسة . ويرى الباحث أن الأهمية العملية لهذا البحث تتمثل في :

١ . تقديم مدخل إكتواري جديد لتسعير وثائق التأمين المؤقت الجماعي الاختياري من خلال تقدير دالة الطلب الكلي على هذا النوع من التأمين ، والتي يمكن أن تستخدم عندئذ لتحديد قيمة القسط الذي يعظم أرباح المؤمن .

٢ . تقديم مدخل إكتواري جديد لتقدير الحد الأقصى لأرباح المؤمن المقدم لهذا النوع من التأمين من خلال التوصل لعدة دوال غير خطية ، يعتمد فهمها على ضرورة معرفة المستخدم لهذا الأسلوب المعرفة الجيدة بأساسيات الجذور المشهورة مثل : طريقة **Neaten , Rawson**[(١)].

٣ . تقديم مدخل إكتواري جديد من خلال تحديد قيمة مبدئية أو أولية لقسط التأمين الجماعي الاختياري ، والذي يعتبر عندئذ أساس لتحديد قيمة القسط الذي يعظم أرباح المؤمن.

٤ . هذا المنهج العلمي يمكن أن يستخدم لتسعير أنواع أخرى من وثائق تأمينات الحياة الجماعية مثل : عقد التأمين الجماعي الاختياري ذو القسط المجدد ***renewal premium optional group insurance*** حيث لا يوجد اكتتاب طبي ، وعقد التأمين الجماعي ذو التغطية الأساسية ***basic group***

---

(1) R.L. Burden and J.D. Faires, Numerical Analysis (7th ed), Brooks/Cole Publishing Company, New York (2001).

insurance coverage والذي يقدم تغطية لكل العاملين بقدر واحد من المزايا.

٥. هذا المنهج العلمي يمكن أن يستخدم لدراسة الوفيات لمعرفة أسباب الاختلافات في معدلات الوفيات ضمن مجموعة عمرية واحدة أو خلال مدى عمري معين - وحسب علم الباحث – فإن مثل هذه الدراسات غير متوافرة بالسوق المصرية.

٦. يرى الباحث أن الأهمية العملية لتسعير هذا النوع من التأمين تنبع من الاتجاه المتزايد للتوسع في إنشاء المشروعات الصناعية والتجارية والخدمية الخاصة والتي تستوعب الكثير من الأيدي العاملة ، ويكون صاحب العمل هو المسئول عن تعويض هؤلاء أو ذويهم عند تحقق خطر الوفاة لأي منهم ، وبالتالي يستطيع صاحب العمل نقل هذا الخطر إلى شركة التأمين مقابل قسط مناسب تم تقديره على أسس علمية واضحة.

هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى إلقاء الضوء على مشكلة تسعير التأمين المؤقت الجماعي الاختياري طبقا للنظرية الاقتصادية التقليدية في التسعير ، فالمؤمن يسعى نحو تعظيم الربح في ظل الخطر الطبيعي ، كما يفترض أن العاملين المقدم لهم هذا التأمين الجماعي متماثلين من حيث الخصائص العامة فيما عدا معدلات وفياتهم ، فكل عامل أو مستخدم أو موظف له سقف أو حد أعلى لسعر التأمين *a reservation price for insurance* . ولتخفيض تأثير الاختيار ضد مصالح شركة التأمين، فإن المؤمن يضع حد أقصى مقبول لمعدل الوفاة المتوقع ، وتكون المشكلة الرئيسية هنا هي تقدير هذا الحد الأقصى المقبول ، حتى يستطيع المؤمن تحقيق الربح المتوقع . وهذا ما سوف نتعرض له في هذه الورقة.

فروض البحث

يقوم هذا البحث على عدة فروض أساسية وهى :

(١) صاحب العمل لديه مجموعة من العاملين قدرهم N عامل أو مستخدم ، لكل منهم معدل وفاة ، يرغب في التأمين عليهم بمقتضى وثيقة واحدة . في نفس الوقت يقوم المؤمن بوضع حد أقصى لمعدلات الوفاة المقبولة لديه هو q^M .

(٢) المؤمن يقوم بتحديد قيمة قسط التأمين G مقابل ميزة معينة B تدفع عند تحقق خطر الوفاة .

(٣) الحد الأقصى لمعدلات الوفاة q^M يكون غير معروف للعاملين .

(٤) كل مستخدم لديه سقف أو حد أقصى لسعر التأمين ***own reservation price*** ، يكون مستعدا لدفعه مقابل هذا العقد $\left(G, B, q^M\right)$.

(٥) الحد الأقصى للسعر الذي يكون العامل أو المستخدم مستعدا لدفعه مقابل هذا العقد يكون غير معروفا مقدما للمؤمن .

(٦) إذا عرض على المستخدم سعر أقل أو يساوي هذا الحد الأقصى للسعر ***reservation price*** فإنه يجب عليه القيام بشراء هذا العقد .

(٧) يقوم صاحب العمل – نيابة عن العاملين – بدفع قيمة قسط التأمين في بداية سنة الوثيقة ، وهذه الأقساط تكون واحدة لكل العاملين المقبولين تأمينيا .

(٨) يقوم صاحب العمل – نيابة عن العاملين – بشراء هذا النوع من العقود من خلال شركات التأمين على الحياة فقط .

حدود البحث

اقتصرت الدراسة هنا على تقديم مدخل جديد لتسعير وثائق التأمين المؤقت الجماعي الاختياري فقط دون الأنواع الأخرى من وثائق التأمين الجماعي .

هيكل البحث

تم تقسيم ذلك البحث إلى أربعة فصول وهى :

الفصل الأول : الطرق التقليدية لتسعير التأمين .

الفصل الثاني : هيكل دالة معدلات الوفاة لعقد التأمين المؤقت الجماعي الاختياري .

الفصل الثالث : الأرباح المتوقعة وشروط الطلب الأولي .

المبحث الأول : حالة استثناء بعض المستخدمين من التغطية التأمينية .

المبحث الثانى : حالة عدم استثناء أي مستخدم من التغطية التأمينية .

الفصل الرابع : الدوال غبر الخطية وتحديد أقصى ربح محتمل .

النتائج والتوصيات .

المراجع .

الفصل الأول

طرق التقليدية لتسعير التأمين

تختلف طرق تسعير التأمين التقليدية باختلاف نوع التأمين وذلك على النحو التالي :

بالنسبة لتأمينات غير الحياة

بفرض أن N تعبر عن مجموعة من الوحدات ذات خطر متجانس ، وأن هناك k وحدة معرضة لخسارة غير حياة محتملة قدرها $X_k \geq 0, k = 1,2,3,........, N$ في الفترة الحالية . وترغب كل وحدة من هذه الوحدات في الحصول على تغطية تأمينية كاملة تغطي كامل الخسارة المحتملة . وبفرض أن الخسائر مستقلة بعضها عن بعض وتأخذ شكل توزيع متماثل ، فطبقا للمدخل الإكتواري التقليدي أن تتحدد قيمة القسط التجاري G من العلاقة التالية :

$$G = \mathrm{E}[X_K] + \mathrm{EXP}_K + \mathrm{PFT}_K + R_K$$

حيث أن :

- $\mathrm{E}[X_K]$ تمثل قيمة الخسارة المتوقعة (القسط الصافي) .
- EXP_K تمثل قيمة المصروفات المحملة على القسط الصافي .
- PFT_K تمثل قيمة أرباح المؤمن من وراء إصدار هذا العقد .
- R_k تمثل عبء الخطر (احتياطي طوارئ **contingency**) والذي يضاف لتغطية الانحرافات المضادة ، إي لتغطية الزيادة في الخسائر الفعلية التي تزيد عن الخسائر المتوقعة ، وهذا الاحتياطي يتناقص تدريجيا كلما زادت قيمة N .

وأيا كانت طريقة حساب القسط فإنها تأخذ في الاعتبار مبدأ التباين بين وحدات الخطر والمعرضة لنفس الخطر ، وبالتالي فإن عبء الخطر R_K يجب أن يكون نسبة من X_k ، إي أن :

$$R_K = k\mathrm{Var}[X_K] \qquad (1)$$

حيث أن k مقدار ثابت[١] .

وبالتالي فإنه طبقا للمدخل الإكتواري التقليدي تتحدد قيمة القسط التجاري من خلال المعادلة التالية :[٢]

$$G = \frac{\mathrm{E}[X_k] + e_\mathrm{F}}{1 - e_\mathrm{V} - e_\mathrm{R}}$$

حيث أن :

- e_F تمثل قيمة المصروفات الثابتة عن كل وثيقة .

---

(١) يمكن الرجوع إلى :

- **H. Buhlmann , Mathematical Models in Risk Theory, Springer-Velar, New York (1970).**
- **Gerber, H.U., An Introduction to Mathematical Risk Theory. S.S. Huebner Foundation, Philadelphia, PA. Distributed by Irwin, Inc., Homewood, ILL. (1979).**
- **M.J. Goovaerts, F. de Vylder and J. Haezendonck, Insurance Premiums, North-Holland, Amsterdam (1984).**

(٢) يمكن الرجوع إلى :

- **C.L. McClenahan, Ratemaking, *Foundations of Casualty Actuarial Science* (3rd ed), Casualty Actuarial Society, Arlington, VA (1996), pp. 25–90.**
- **P. Booth, R. Chadburn, D. Cooper, S. Haberman and D. James, Modern Actuarial Theory and Practice, Chapman & Hall/CRC Press, London (1999).**

- e_V تمثل معامل المصروفات المتغيرة .
- e_R تمثل معامل الربح ، وهذه عادة تمثل نسبة من قيمة القسط .

وغالبا ما تكون جماعة المؤمن لهم جماعة غير متجانسة ، بمعنى آخر : لديهم تعويضات متوقعة مختلفة وخصائص خطر أيضا مختلفة . في مثل هذه الحالات فإن هناك مجموعة من المعايير الإكتوارية تستخدم لتصنيف هؤلاء إلى مجموعات متجانسة نسبيا دون الإخلال بقانون الأعداد الكبيرة ، بحيث لا يكون هناك فرق كبير بين الاحتمالات الفعلية وتلك المتوقعة والتي على أساسها تم تقدير القسط ، وبالتالي يتم تسعير الخطر لكل مجموعة باستقلال عن المجموعات الأخرى .[1]

بالنسبة لتأمينات الحياة

يجب علينا هنا أن نفرق بين عدة حالات وهى :

بالنسبة للتأمين على الحياة الفردي

المشكلة الكبرى المحتملة والتي تواجه المؤمن هنا في التأمين على الحياة الفردي هي الاختيار المضاد ضد مصالح شركة التأمين ، بمعنى : وجود أشخاص ذوي مستوى صحي أقل نسبيا من المستوى المطلوب التأمين عليه ، يرغبون في شراء التأمين على الحياة بنفس أسعار الأشخاص الأصحاء .[2]

(1) R.J. Finger, Risk Classification, *Foundations of Casualty Actuarial Science* (3rd ed), Casualty Actuarial Society, Arlington, VA (1996), pp. 231–276.

(٢) يمكن الرجوع إلى :

- M. Rothschild and J. Stiglitz, Equilibrium in competitive insurance markets, *Quarterly Journal of Economics* 90 (1976), pp. 629–649.
- C. Wilson, A model of insurance markets with incomplete information, *Journal of Economic Theory* 12 (1977), pp. 167–207.
- M. Spence, Product differentiation and performance in insurance markets, *Journal of Public Economics* 10 (1978), pp. 427–447.

وللتقليل من عملية الاختيار المضاد يستطيع المؤمن إخضاع طالب التأمين لعملية فحص طبي من ناحية ، وكذلك دراسة بطاقة الأحوال الصحية العائلية لطالب التأمين من ناحية أخري . وفى ضوء هذا الفحص والدراسة يقرر المؤمن إحدى الحالات التالية :

- رفض التأمين ، أو
- قبول التأمين بالأسعار العادية ، أو
- قبول التأمين ولكن بسعر أعلى .

وعموما تساعد عملية الاكتتاب الطبي ***medical underwriting*** في تقرير الوضع الحالي لصحة طالب التأمين ، وتوقعات الوفاة مستقبلا . ولا شك أن هذا يسمح للمؤمن بتقدير العمر الصحي الملائم و / أو جدول الوفيات المناسب الذي يناسب هذا الشخص صحيا . وقد استعمل الإكتواريون مبدأ المكافئة التقليدي ***traditionally used the equivalence principle*** لحساب قيمة القسط السنوي G التجاري كما يلي :

$$G = \frac{(1 + c).B \times A + e_0 + e \times \ddot{a}}{(1 - f).\ddot{a}}$$

حيث أن :

- B قيمة مزايا حال الوفاة المقدمة ***the amount of death benefit provided .***
- $A, \ddot{a}$ دوال إكتوارية يتم التوصل لهما من خلال جدول الوفيات المختار ***the actuarial functions calculated using the chosen mortality table .*** والتي تعتمد على كل من : سن المؤمن عليه ، مدة الوثيقة ، معدل الفائدة الفني المستخدم .
- e_0 تكاليف إصدار العقد المبدئية ***initial expense*** .

- e تكاليف تجديد العقد ***renewal expense*** .
- c نسبة من B مقابل مصروفات المطالبة عند تحقق خطر الوفاة المؤمن منه ***death claim expenses*** .
- f نسبة من G مقابل تحصيل الأقساط السنوية ***annual expenses*** .

بالنسبة للتأمين على الحياة الجماعي [١]

يوفر هذا النوع من التامين الحماية التأمينية لمجموعة من الأشخاص تربطهم ببعض صلة معينة وذلك بمقتضى وثيقة واحدة ، وغالبا ما يكون هؤلاء إما عاملين بمنشأة تجارية أو صناعية أو خدمية أو أعضاء في نادي أو جمعية أو نقابة أو مدينين لمؤسسة تجارية أو بنك . ومن المزايا التي يمكن أن تغطى بموجب التامين الجماعي ما يلي :

- تأمينات الحياة في شكل عقد تأمين مؤقت يتجدد سنويا .
- تامين العجز الكلي الدائم والناتج عن مرض (دون حادث) .
- تامين العجز الكلي الدائم والناتج عن حادث .
- تامين العجز الجزئي الدائم والناتج عن حادث .
- تامين العجز الكلي المؤقت والناتج عن حادث .

---

(١) يمكن الرجوع إلى :

- **W.F. Bluhm, W.F. Group Insurance, 3rd ed. ACTEX Publications, Inc., Winstead, CT. (2000).**
- **S.T. Carter, Estimating claim costs for life benefits., *Group Insurance* (3rd ed), ACTEX Publications, Inc., Winstead, CT (2000), pp. 399–425.**

الفصل الثاني

هيكل دالة معدلات الوفاة لعقد التأمين المؤقت الجماعي الاختياري النموذج

بفرض أن هناك مؤمن ما تم اختياره لتقديم الحماية التأمينية من خلال عقد رئيسي للتأمين على كل العاملين المؤهلين بهذه المنشأة . هذه الوثيقة الأساسية ذات القيمة الصغيرة والقابلة للتجديد سنويا هي بمثابة عقد تأمين مؤقت ، حيث يقوم صاحب العمل بدفع كامل قيمة الأقساط . ومن المفترض أن هؤلاء العاملين قد تم تصنيفهم تأمينيا طبقا لعدة معايير كالسن والوضع التدخيني ونوع الصناعة والموقع الجغرافي وغيرها . والهدف من هذا التصنيف هو الوصول إلى مجموعات متجانسة قدر الإمكان .

فالمؤمن يسعى نحو تعظيم أرباحه ، والذي يجعله يقبل تجديد عقد التأمين المؤقت الجماعي الاختياري السنوي لصاحب العمل مقابل التزامه بدفع مبلغ معين هو قيمة المزايا حال تحقق خطر الوفاة B ، والتي تدفع في نهاية السنة التي وقعت فيها الوفاة .

وكل مستخدم أو عامل أو موظف يتقدم بطلب للحصول على التأمين يكون خاضعا لإثبات القابلية للتأمين من خلال كشف طبي ذو تكلفة مرتفعة ، ومن خلال عملية الاكتتاب في الخطر يمكن تقدير معدل الوفاة السنوي لطالب التأمين q بدقة . ويكون المستخدم مقبول تأمينيا إذا كان – وكان فقط – $q \leq q^M$ ، حيث أن q^M تمثل الحد الأقصى لمعدل الوفاة المقبول ، بمعنى أن يكون معدل الوفاة السنوي لطالب التأمين في حدود الحد الأقصى لمعدل الوفاة المقبول ***the mortality cut-off***

rate . وعادة ما يقوم المؤمن بوضع فئات من q^M ، وكل مجموعة من العاملين المتماثلين يتم وضعهم في فئة معدلات الوفاة المناسبة لهم .

وعادة ما تكون مدة هذا العقد سنة واحدة قابل للتجديد ، مقابل قسط تجاري G ، والذي يضمن قدر معين متفق عليه من المزايا عند تحقق خطر الوفاة قدرها B تدفع في نهاية سنة الوثيقة عند تحقق خطر الوفاة المؤمن منه ، كما أن هناك حد أقصى لمعدلات الوفاة المقبولة لدى المؤمن هي q^M . وبالتالي سوف نرمز لهذا النوع من العقود بالرمز (G,B,q^M) .

وبفرض أن q^L, q^H تعبران عن الحد الأدنى والحد الأقصى لمعدل الوفاة السنوي على الترتيب ، لمجموعة المؤمن عليهم (جماعة العاملين) . والمصلح $q^H - q^L$ يعبر عن مقدار الاختلاف في معدلات الوفاة بين جماعة العاملين . هذه الجماعة من العاملين من المفترض أن تكون ذات تركيبة من معدلات الوفاة ، بمعنى أنه إذا تم اختيار عامل أو مستخدم ما عشوائيا له معدل وفاة Q ، هذا المعدل يكون بمثابة متغير عشوائي معرف على الفئة (q^L, q^H) ، حيث أن $0 \le q^L < q^H < 1$.

وبفرض أن $\Omega(q)$ تعبر عن هيكل دالة الكثافة التراكمية ***cumulative Density Function (c.d.f)*** لـ معدل الوفاة Q . بمعنى : $\Omega(q)$ تعبر عن النسبة في المجموعة التي يكون معدل وفياتها أقل من أو يساوي q . أي أنه يفترض :

(٩) دالة كثافة الاحتمال ***Probability Density Function (p.d.f)*** لـ معدل الوفاة Q موجودة ومعرفة بـ $\Omega'(q) > 0$ حيث أن : $q^L < q < q^H$ ، وصفر بخلاف ذلك .

(١٠) وقت تحقق خطر الوفاة لكل عامل أو مستخدم هو بمثابة متغير عشوائي مستمر مستقل وبغض النظر عن كمية التأمين المشتراة ووقت الوفاة لأي عامل أو مستخدم آخر .

(١١) المؤمن على معرفة وعلم بـ $\Omega(q)$ لكل قيم q .

(١٢) المؤمن ليس على معرفة بمعدل الوفاة الفردي عن كل مستخدم على حدة ، بينما كل مستخدم على علم بمعدل وفاته في ضوء مستواه الصحي والتاريخ الصحي لأسرته .

ومن واقع الدراسات التي تمت في السوق الأمريكية نجد أن معدلات الوفاة لجماعة المؤمن عليهم في التأمين المؤقت الجماعي الاختياري تقترب من توزيع بيتا ***beta distribution*** ، والذي يقوم – كما هو معروف – على قيمتين هما **(0,1)** . وبالتالي يمكننا القول وبطريقة أكثر عمومية أن $\Omega'(q)$ هي بمثابة توزيع بيتا بالاعتماد على قيمتين هما $\left(q^L, q^H\right)$. أي أن :

$$\Omega'(q) = \begin{cases} \dfrac{\left(q - q^L\right)^{a-1}\left(q^H - q\right)^{b-1}}{\beta(a,b)\left(q^H - q^L\right)^{a+b-1}} & \text{if } q^L < q < q^H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حيث أن :

$\beta(a,b)$ هي دالة بيتا والتي تحسب من العلاقة التالية :

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

بشرط أن تكون $a,b > 0$

وبفرض أن $\overline{q}$ تعبر عن متوسط معدل الوفيات السنوي للمجموعة الطالبة للتأمين الجماعي ، σ_Q^2 تعبر عن التباين السنوي لمعدل وفيات هذه المجموعة ، واللذان يتم حسابهما من العلاقات التالية :

$$\overline{q} = \int_{q^L}^{q^H} q \, \mathrm{d}\Omega(q)$$

$$\sigma_Q^2 = \int_{q^L}^{q^H} \left(q - \overline{q}\right)^2 \, \mathrm{d}\Omega(q)$$

وقد لاحظ ***Carter*** أن $\overline{q}$ في أي مجموعة عمرية تكون ذات معدلات وفاة أقل من متوسط معدل وفيات عامة السكان في نفس المجموعة العمرية . وقد كانت هناك عدة محاولات لتقدير قيمة $\overline{q}$ ، وكانت أولى تلك المحاولات ما قام به ***Miller*** سنة ١٩٦١ ، كما قام أيضا معهد الخبراء الإكتواريين بكندا سنة ١٩٩٤ بتقدير هذه القيمة . ويجب التنويه إلى أن الدراسة الأخيرة مستندة على خبرة دراسة قام بها المعهد الكندي سابقا لمجموعة كبيرة من العاملين سنة ١٩٨٩ ، والتي توضح أن قيمة $\overline{q}$ تتراوح تقريبا من **0.0001** في مجموعة فئة الأعمار الصغيرة **(34 - 30)** إلى **0.03** في مجموعة فئة الأعمار الكبيرة (69 - 65) . ولا شك أن هذه المعدلات تختلف باختلاف الفئة العمرية والجنس والسلالة . وعموما يمكننا القول بأن دراسات معدلات الوفيات الجماعية ليس لها تقديرات لكل من q^L, q^H ، وكذلك أيضا لكل من $\overline{q}\ ,\ \sigma_Q^2$.

الحد الأقصى لسعر التأمين المقبول ***Reservation prices***

حيث أن لكل مستخدم معدل وفاة q ، وبفرض أن $\pi(q,B)$ تعبر عن الحد الأقصى للسعر الذي يمكن أن يوافق عليه المستخدم أو العامل لشراء هذا العقد $\left(G,B,q^M\right)$. هذا السعر يمكن أن نعبر عنه من خلال العلاقة التالية :

$$\pi(q,B) = B\upsilon q(1+\theta)$$

حيث أن :

- υ هي القيمة الحالية لوحدة النقود تدفع فورا عن واحد سنة بمعدل خصم يعادل المعدل الخالي من المخاطرة .
- θ تعبر عن الحد الأقصى لنسبة العبء الذي يضاف إلى القسط .
- المقدار $B\upsilon q$ يعبر عن القسط الإكتواري العادل ***the actuarially fair premium***
- المقدار $B\upsilon q\theta$ يعبر عن الحد الأقصى للقسط والذي يكون المستخدم أو العامل مستعدا لدفعه لشركة التأمين .

وبالتالي يمكن النظر إلى العبء θ على أنه مقياس لمدى قابلية وميول المستخدم أو العامل نحو شراء التأمين . وبالتالي فإن المستخدم ذو معدل الوفاة الأعلى يقبل على شراء التأمين بدرجة أعلى من هؤلاء ذوي معدلات الوفاة الأقل وبغض النظر عن قيمة θ .[١]

وفى ضوء ذلك يمكننا وضع الفرضيات التالية أيضا بغرض الوصول إلى النموذج النهائي للتسعير :

(١٣) لأي مقدار أو كمية ثابتة من التأمين B فإن الحد الأقصى للسعر الذي يقدمه المستخدم يزيد كلما زاد معدل وفاته q ، بمعنى آخر : $\frac{\partial \pi}{\partial q} > 0$ لكل $0 < q < q^H$.

ومن واقع المشاهدة العملية لشركات التأمين على الحياة المقدمة للوثائق

(1) M. Rothschild and J. Stiglitz, Equilibrium in competitive insurance markets, *Quarterly Journal of Economics* 90 (1976), pp. 629–649.

الجماعية لم يتم التعرف على سلوك θ كلما زادت قيمة q ، فيما عدا إذا كانت $\theta = 0$ وعندما $q = 1$. وقد استطاع ***Pratt*** سنة ١٩٦٤ من خلال معادلات رقم (٥) ، (٧) أن يوضح أن قيمة الحد الأقصى للقسط الفردي والذي يكون المستخدم مستعدا لدفعه لشركة التأمين هو بمثابة تباين الخسارة تقريبا . [١]

وتباين الخسارة في هذه الحالة يكون مساويا للمقدار $(B\upsilon)^2 q(1-q)$ ، والنتيجة التي توصل لها ***Pratt*** وكيفية حساب قيمة تباين القسط في معادلة رقم (١) يعطي حافزا لتقديم التعريف التالي للحد الأقصى للسعر $\pi(q,B)$ الذي يقدمه المستخدم أو العامل ذو معدل الوفاة q كما يلي :

$$\begin{aligned}\pi(q,B) &= B\upsilon q + k(B\upsilon)^2 q(1-q)\\ &= B\upsilon q[1 + kB\upsilon(1-q)]\end{aligned}$$

وحيث أن $\phi = kB\upsilon$ ، وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة السابقة نصل إلى النتيجة التالية :

$$\therefore \pi(q,B) = B\upsilon q[1+\phi(1-q)] \qquad (2)$$

حيث أن $k > 0$ والتي يطلق عليها عادةً معامل الحد الأقصى للخطر ***risk aversion*** ، وهى مقدار ثابت تعكس مستوى عدم رغبة المستخدم أو العامل في خسارة مزايا تحقق خطر الوفاة B .

(١٤) كل العاملين أو المستخدمين لديهم نفس معامل الخطر k بغض النظر عن معدلات وفاتهم ، بمعنى أن k مستقلة عن q .

---

(1) C. Gollier, The Economics of Risk and Time, MIT Press, Cambridge, MA (2001).

والمقدار $\phi(1-q)B\upsilon$ هو بمثابة الحد الأقصى للعبء متضمنا مصروفات وأرباح ومخاطرة المؤمن ، والذي يضاف إلى القسط الصافي $B\upsilon q$ للوصول إلى القسط التجاري G والذي يكون العامل أو المستخدم ذو معدل الوفاة q مستعدا لدفعه .

ومن الملاحظ أن الفرضية رقم (١٣) والتي تم التعبير عنها بمعادلة رقم (٢) مقيدة تحت شرطين وهما :

- إذا كانت $q^H \leq \frac{1}{2}$ فإن $\phi > 0$.
- إذا كانت $q^H > \frac{1}{2}$ فإن $0 \leq \phi < \frac{1}{(2q^H - 1)}$

وفى أكثر الحالات العملية تكون $q^H \leq \frac{1}{2}$ بسبب أن استمرار المستخدم أو العامل في العمل هو شرط أساسي لاستمراره في التأمين الجماعي . وبنفس الطريقة تكون قيمة $\pi(q,B) \leq B\upsilon$ لأي مستوى وفاة . أما الفرضية رقم (١٤) فتدل ضمنا على أن $\phi < \frac{1}{q^H}$.

وبفرض أن q^G تعبر عن الحد الأقصى لمعدل الوفاة المكافئ ***the equivalent reservation mortality*** وبالتالي نستطيع أن نعبر عن القسط بـ $\pi(q^G, B) = G$. وهذا المعدل يحسب من العلاقة التالية :

$$q^G = \frac{1+\phi}{2\phi}\left[1-\left(1-\frac{G}{G^U}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (3)$$

حيث أن :

$$G^U = \frac{(1+\phi)^2 B\upsilon}{4\phi}$$

ومن الملاحظ أن $G^U \geq B\upsilon$ لكل $\phi > 0$.

وبإجراء التفاضل لمعادلة رقم (٣) نتوصل إلى :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G} q^G = \frac{1}{B\upsilon(1+\phi)}\left[1-\left(1-\frac{G}{G^U}\right)^{\frac{-1}{2}}\right] \qquad (4)$$

وهذه الدالة تكون متزايدة وموجبة لكل $0 \leq G \leq B\upsilon$.

ويجب ملاحظة أنه لو أن هذا العقد (G, B, q^M) عرض على كل العاملين بالمنشأة ، فإننا سوف نجد أن العاملين ذوي معدلات الوفاة المرتفعة هم الذين يكونون على استعداد لدفع الحد الأقصى للقسط $\pi(q, B) \geq G$ ، وبالتالي فهم فقط الذين سوف يقبلون على شراء هذا العقد . ففي ظل الفرضية رقم (١٣) نجد أن العاملين ذوي معدلات الوفاة السنوية التي تتجاوز q^G هم فقط الذين سوف يوافقون على شراء هذا العقد .

وبفرض أن $A(G, B, q^M)$ يعبر عن العدد المتوقع لطالبى العقد (G, B, q^M) ، الذين لديهم معدلات وفاة q بشرط أن $q \leq q^M$ والمسموح لهم بشراء هذا العقد – حيث تكون q^M غير معروفة للعاملين – والذي يحسب من العلاقة التالية :

$$A(G, B, q^M) = N[1 - \Omega(q^G)]$$

وبالتالي فإن العدد المتوقع من مبيعات التأمين سوف يقل والذي سوف نرمز له بالرمز $S(G, B, q^M)$ ، والمعطى من العلاقة التالية :

$$S(G,B,q^M) = N[\Omega(q^M) - \Omega(q^G)]$$

بينما العائد المتوقع يحسب من العلاقة التالية :

$$G \times S(G,B,q^M)$$

مطالبات الوفاة والمصروفات المتوقعة

بفرض أن $I\{A\}$ تعبر عن مؤشر أو دليل عن الحدث A ، بمعنى آخر :

$$I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ occurs} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

وبفرض أنه تم اختيار مستخدم ما أو عامل ما عشوائيا ذو معدل وفاة Q ، وبفرض أن $T(Q)$ تعبر عن عدد سنوات الحياة المتوقع أن يعيشها هذا المستخدم الذي تم اختياره عشوائيا مستقبلا ، وبفرض أن $X(Q)$ تعبر عن القيمة الحالية لقيمة المطالبة الحقيقية عند وفاة المستخدم خلال السنة القادمة ***employee's actual death claim during the next year*** . حيث $X(Q)$ نحصل عليها من العلاقة التالية :

$$X(Q) = B\upsilon I\{T(Q) \le 1\} I\{q^G \le Q \le q^M\}$$

وبالتالي فإن قيمة المطالبة المتوقعة عند وفاة المستخدم أو العامل العشوائي تكون :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X(Q)] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[X(Q)|Q]] \\ &= B\upsilon \int_{q^G}^{q^M} q \, \mathrm{d}\Omega(q) \end{aligned}$$

وحيث أن هناك مصروفات مرتبطة بإصدار عقود التأمين على الحياة ، وتدفع مباشرة من قبل المؤمن ، مثل : مصروفات فحص طلبات التأمين ، مصروفات الفحص

الطبي ، مصروفات الاكتتاب في الخطر ، المصروفات المتعلقة بعمليات صرف مطالبات الوفاة ، أيضا الضرائب على الأقساط . وعادة يفترض أن مثل هذه المصروفات سوف يتم تحميلها ودفعها في بداية سنة الوثيقة عند الإصدار ، فيما عدا تلك المصروفات المتعلقة بمطالبات الوفاة ، حيث يفترض أن هذا النوع من المصروفات سوف يتم دفعها في نهاية سنة الوثيقة وعند وفاة المؤمن عليه .

وعادة تأخذ مثل هذه المصروفات إحدى الأشكال الثلاثة التالية :

- نسبة من القسط ***a percent of premium*** .
- نسبة من مبلغ الوفاة ***a percent of death benefit*** .
- مبلغ مقطوع عن كل وثيقة ***on a per policy basis*** .

بمعنى آخر فإنه من المفترض أن :

- المؤمن يتحمل ما يعادل $100e\%$ من ميزة الوفاة لكل مطالبة ، بغض النظر عن حصيلة هذه المطالبات .
- المؤمن يدفع ما يعادل $100f\%$ من دخل القسط التجاري مقابل المصروفات.
- المؤمن يدفع ما يعادل $100c\%$ من ميزة الوفاة عن كل مطالبة وفاة في نهاية سنة الوثيقة التي تقع فيها الوفاة .

وفى الواقع العملي نجد أن :

- e تزيد قيمتها مع زيادة كل من قيمة مبلغ تأمين الوفاة B ، وعمر طالب التأمين . لذا عادة ما يتم تحديد مبلغ ثابت لمقابلة هذا النوع من

المصروفات، ففي الولايات المتحدة الأمريكية – مثلا – نجد أن e تكون في المتوسط أقل من ٢ دولار عن كل مبلغ تأمين ١٠٠٠ دولار . [١]

- التكلفة c عادة تكون قيمتها أقل من e .
- التكلفة f عادة تكون أكبر نسبيا وتقع في المدى $0 \le f < 0.10$

وبالتالي يمكن حساب إجمالي المصروفات المتوقعة (مطالبات الوفاة + المصروفات الأخرى) للعقد (G, B, q^M) لمجموعة المؤمن عليهم N مؤمن عليه من العلاقة التالية :

$$\text{Expected costs} = fGS(G, B, q^M) + eBA(G, B, q^M) + N(1+c)B\upsilon\int_{q^G}^{q^M} q \, d\Omega(q)$$

(1) L. Kane, Alternative/simplified underwriting for life and health products, *Record of the Society of Actuaries* 27 (2002) (3) Session 130PD.

الفصل الثالث

الأرباح المتوقعة وشروط الطلب الأولي

بفرض أن ρ تعبر عن إجمالي الربح المتوقع للمؤمن (الدخل المتوقع – المصروفات المتوقعة) المقدم من العقد $\left(G,B,q^{M}\right)$ لمجموعة من المستخدمين عددهم N شخص ، وبالتالي يمكن حساب قيمة ρ من العلاقة التالية :

$$\rho = N.G(1-f)\left[\Omega\left(q^{M}\right)-\Omega\left(q^{G}\right)\right]-N.e.B\left[1-\Omega\left(q^{G}\right)\right]$$
$$-N(1+c)B.\upsilon\int_{q^{G}}^{q^{M}} q\, \mathrm{d}\Omega(q) \qquad (5)$$

وبفرض أن $G^{L}=\pi\left(q^{L},B\right)$ تعبر عن الحد الأدنى المقبول – مع التحفظ – من الأقساط ، $G^{H}=\pi\left(q^{H},B\right)$ تعبر عن الحد الأقصى المقبول – مع التحفظ – من الأقساط .

وبالتالي إذا فرضنا أن المؤمن طالب بقسط تجاري قدره G ، حيث أن $G<G^{L}$ ، حينئذ سوف يقبل كل مستخدم أو كل عامل على شراء التأمين وبالتالي يكون مؤمن عليه .

ويجب التنويه هنا إلى أن المؤمن يستطيع أن يزيد القسط التجاري G إلى أن يصل إلى G^{H} بدون أي زيادة في قيمة مطالبات الوفاة المتوقعة ومصروفات الكشف الطبي ، وبدون فقد أي عقد من عقود التأمين لأي مستخدم ، وبالتالي ما يزال هناك زيادة في الدخل والأرباح المتوقعة . ويستمر هذا الوضع متى كانت $G<G^{H}$. أما إذا طالب المؤمن بقسط تجاري G ، حيث أن $G>G^{H}$ فأنه لن يقدم أي مستخدم على شراء هذا التأمين .

وبالتالي يمكننا القول بأن قيمة القسط G تكون مقبولة إذا كانت – وكانت فقط – $G^L \le G \le G^H$ ، حيث أن :

$$G^L = B\upsilon q^L\left[1+\phi\left(1-q^L\right)\right]$$

$$G^H = B\upsilon q^H\left[1+\phi\left(1-q^H\right)\right].$$

وبالتالي تكون معادلات الطلب الأولي ***The first order equations*** المتوصل لها من معادلة رقم (٥) على النحو التالي :

$$\frac{\partial\rho}{\partial q^M} = N\left[(1-f).G-(1+c)B\upsilon q^M\right]\Omega'\left(q^M\right) \qquad (6)$$

أيضا :

$$\frac{\partial\rho}{\partial G} = N(1-f)\left[\Omega\left(q^M\right)-\Omega\left(q^G\right)-\left(G-\frac{eB+(1+c)B\upsilon q^G}{1-f}\right)\Omega'\left(q^G\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G}q^G\right]..(7)$$

وبمساواة معادلة رقم (٧) بـ صفر ، واستبدال G بـ G^* وبإعادة ترتيب المقادير نصل إلى المعادلة التالية :

$$N.G^*\mathrm{d}\Omega\left(q^{G^*}\right)-N\left[\Omega\left(q^M\right)-\Omega\left(q^{G^*}\right)\right]\mathrm{d}G^*$$
$$= N\left[\left[fG^*+e.B+(1+c)B\upsilon q^{G^*}\right]\mathrm{d}\Omega\left(q^{G^*}\right)+Nf\left[\Omega\left(q^M\right)-\Omega\left(q^{G^*}\right)\right]\right]\mathrm{d}\,G^*$$

وهذا له تفسير بديهي ، فعند مقدار ثابت لـ q^M وعند السعي نحو تعظيم الربح ، فإن القسط يزيد من G^* إلى $G^*+\mathrm{d}\,G^*$ ، والتعبير $N\,\mathrm{d}\,\Omega\left(q^{G^*}\right)$ يدل على عدد العاملين الذين يسقطون من التغطية التأمينية . وبالتالي فإن الجانب الأيمن من هذه المعادلة يدل على مقدار النقص في المصروفات المتوقعة ومطالبات الوفاة ، بينما الجانب الأيسر يوضح مقدار النقص في دخل الأقساط المتوقع.

وبمساواة معادلة رقم (٦) بالصفر فإننا نتوقع حالتين من الحلول وهما :

- **الحالة الأولى** : **إذا كانت قيمة** $(1-f)G-(1+c)B\upsilon q^{M} = 0$

في هذه الحالة ينتج زوجين من المعاملات تحققا الحد الأقصى للربح وهما $\left(G_1^{*}, q^{M*}\right)$ ، ويكون هناك تعظيم للربح المتوقع ρ_1^{*} .

- **الحالة الثانية** : **إذا كانت قيمة** $\Omega'\left(q^{M}\right) = 0$

وفي هذه الحالة ينتج زوجين من المعاملات تحققا الحد الأقصى للربح وهما $\left(G_2^{*}, q^{H}\right)$ ، ويكون هناك تعظيم للربح المتوقع ρ_2^{*} .

وكما هو واضح لنا نجد أن المؤمن أستثنى بعض العاملين من التغطية التأمينية طبقا للحالة الأولى ، بينما في الحالة الثانية نجد أن المؤمن لم يستثنى أي مستخدم من التغطية . ويجب التنويه إلى أنه عند تحديد زوج تعظيم الربح $\left(G_1^{*}, q^{M*}\right)$ كما في الحالة الأولى أو كما في الحالة الثانية $\left(G_2^{*}, q^{H}\right)$ ، فإن هذا التحديد يتم بصورة منفصلة للحالة الأولى عن الحالة الثانية . وسوف نتعرض هنا لهاتين الحالتين بنوع من التفصيل كل منهما في مبحث مستقل ، وذلك على النحو التالي :

المبحث الأول

حالة استثناء بعض المستخدمين من التغطية التأمينية

طبقا للفرضية رقم (٩) مع إحداث تغيير بسيط نجد أن المؤمن يستثني بعض العاملين من التغطية ، وهذا يتحقق عندما تكون قيمة $\Omega'(q^M) \neq 0$ ، وهذا يدل على أن $q^L < q^M < q^H$ ، بمعنى آخر : أن المؤمن سوف يستثني العاملين ذوي معدلات الوفاة التي تزيد عن q^M من شراء العقد (G_1, B, q^M) . وبالتالي فإن الحد الأقصى للربح (G_1^*, q^{M*}) يتحقق عندما $(1-f)G_1 - (1+c)B\upsilon q^M = 0$ ، إي أن :

$$(1-f)G_1 = (1+c)B\upsilon q^M$$

$$\therefore G_1^* = \frac{(1+c)B\upsilon q^{M*}}{1-f} \tag{8}$$

ويتضح من معادلة رقم (٨) أن G_1^* والتي تعبر عن الحد الأقصى لقسط عقد التأمين المؤقت الجماعي الاختياري والذي يكون مسعراً بطريقة تعكس الحد الأقصى لمدى الوفاة المقبول q^{M*} للمؤمن . عندئذ يمكننا التوصل إلى النتائج التالية :

١. الحد الأقصى للقسط G_1^* يكون كافيا لتغطية القسط الإكتواري العادل + المصروفات التي تمثل نسبة من القسط + مصروفات المطالبة بالوفاة لمعظم العاملين المقبولين.

٢. الحد الأقصى للقسط G_1^* يكون مستقلا عن عدد مفردات المجموعة المغطاة N .

٣. الحد الأقصى للقسط G_1^* لا تعتمد مباشرة على تكلفة الاكتتاب الطبي ***medical underwriting*** والتي سوف نرمز لها بـ eB .

وبالتعويض عن قيمة G المتوصل لها في معادلة رقم (٥) في معادلة الربح المتوصل لها في معادلة رقم (٨) وكتابة معادلة الربح كما لو كانت دالة في q^{M*} فإننا نتوصل للمعادلة التالية :

$$\rho_1 = N(1+c)B\upsilon\left[q^{M*}\left[\Omega\left(q^{M}\right)-\Omega\left(q^{G_1*}\right)\right]-\frac{\left[1-\Omega\left(q^{G_1*}\right)\right]e}{(1+c)\upsilon}-\int_{q^{G_1*}}^{q^{M*}} q\,\mathrm{d}\Omega(q)\right] .. (9)$$

حيث أن – طبقا لما ورد في معادلة رقم (٣) – q^{G_1*} والتي تمثل الحد الأقصى لمعدل الوفاة المقبول عند مستوى قسط G_1^* يتم الحصول عليه من المعادلة التالية :

$$q^{G_1*} = \frac{1+\phi}{2\phi}\left[1-\sqrt{1-\frac{q^{M*}}{q^{U}}}\right] \qquad (10)$$

حيث أن :

$$q^{U} = \frac{(1-f)(1+\phi)^2}{4(1+c)\phi}$$

مع ضرورة التنويه إلى أنه لن يوجد معدل وفيات واحد أخر يمكن أن يتجاوز q^{U} .

ومن معادلة رقم (٤) وبإجراء التفاضل الجزئي لـ G_1^* يكون :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,G_1} q^{G_1*}\Big|_{G_1*} = \frac{1}{B\upsilon(1+\phi)}\left(1-\frac{q^{M*}}{q^{U}}\right)^{\frac{-1}{2}} \qquad (11)$$

وبالتالي نستطيع إعادة كتابة معادلة الطلب الأولي كما يلي :

$$\frac{\mathrm{d}\,\rho_1}{\mathrm{d}\,q^{M*}} = N(1+c)B\upsilon\left[\Omega\left(q^{M*}\right)-\Omega\left(q^{G_1*}\right)\right]-\frac{N(1+c)B\upsilon}{1-f}$$

$$\left[\left(q^{M*}-q^{G_1*}\right)-\frac{e}{(1+c)\upsilon}\right]\Omega'\left(q^{G_1*}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,G_1^{*}}q^{G_1*} \qquad (12)$$

عندئذ يكون للمؤمن هدفان هما :

- أيجاد قيمة $q^{M*} \in \left(q^{L}, q^{H}\right)$ والذي يعظم قيمة ρ_1 .
- إيجاد قيمة ρ_1^{*} والتي تعظم قيمة ρ_1 .

أساليب تحديد الحد الأقصى لربح المؤمن

هناك مدخلان أو أسلوبان أساسيان لتحديد الحد الأقصى للربح من خلال دراسة وفحص q^{M*} وهما :

- البحث في الفترة $\left(q^{L}, q^{H}\right)$ لكل q^{M*} والتي تعظم ρ_1 .
- إيجاد $q^{M*} \in \left(q^{L}, q^{H}\right)$ والتي تكون بمثابة جذر الجانب الأيمن في معادلة رقم (١٢) .

وفيما يلي شرح مبسط لكل من هذين المدخلين :

المدخل الأول :

يعتبر هذا المدخل أكثر مباشرةً ، ولكن يقدم تفسير بسيط للشروط الضرورية حتى تتحقق النهاية العظمى للربح $q^{M*} \in \left(q^{L}, q^{H}\right)$. وهناك العديد من برامج الحاسب الآلي التي عن طريقها يمكن التوصل إلى هذا المقدار مثل برامج : ***Mathematica, Maple , Math lab*** . والتي عن طريقها يمكن التوصل إلى مدى الفترة $\left(q^{L}, q^{H}\right)$ لكل q^{M*} والتي تعظم ρ_1^{*} .

المدخل الثاني :

هذا المدخل ربما يكون أكثر صعوبة ، ولكن يقدم تفسير وتوضيح أكبر للشروط الضرورية لتحقيق النهاية العظمى للربح الداخلي $q^{M*} \in \left(q^{L}, q^{H}\right)$. فإذا كانت المعادلة رقم (١٢) ليس لها حل في الفترة $\left(q^{L}, q^{H}\right)$ فإن المؤمن عندئذ سوف

يستثنى تلقائيا العاملين ذوي معدلات الوفاة التي تزيد عن معدلات وفاتهم q^M في الفترة (q^L, q^H) .

وبفحص معادلة رقم (١٢) نجد أن هناك ثلاثة متطلبات وشروط ضرورية واضحة لتحقيق الحد الأقصى للربح $q^{M*} \in (q^L, q^H)$ وهى :

- أن تكون $q^{M*} - q^{G_1*} > 0$.
- أن تكون $\Omega'(q^{G_1*}) > 0$.
- أن تكون $q^{M*} - q^{G_1*} > \frac{e}{(1+c)\upsilon}$.

الشرط الأول

فمتطلب $q^{M*} - q^{G_1*} > 0$ يتحقق إذا كان $\phi > \frac{(f+c)}{[(1-f).(1-q^{M*})]}$.

وعموما لضمان التأمين على كل العاملين بالمنشأة بما فيهم أصحاب الخطر غير المرغوب فيه ، فإنه يجب أن تكون قيمة $q^{M*} - q^{G_1*} > 0$ عند اختيار أية مفردة من $q^{M*} \in (q^L, q^H)$ ، وبالتالي تكون غير المتساوية التالية مطلوبة لنا :

$$\phi > \phi^L = \frac{f+c}{(1-f)(1-q^H)} \quad (13)$$

ويجب التنويه إلى أنه في باقي كل أجزاء هذه الورقة سوف نفترض تحقق غير المتساوية السابقة .

فغير المتساوية $\phi > \phi^L$ تدل على أن كل العاملين يكون لديهم حد أقصى للسعر لقبول التأمين ، لذلك فإن العاملين سوف يقومون بدفع القسط G والذي يغطي كل المصروفات $(fG, cB\upsilon)$ الخاصة بالمؤمن والمرتبطة بعملية الفحص والاكتتاب الطبي (eB) . فإذا لم تتحقق غير المتساوية هذه – بمعنى إذا كانت

$q^{M*} \leq q^{G_1*}$ – عندئذ لن يوجد طالب تأمين واحد يسمح له بشراء التأمين ، وبالتالي فإن المؤمن لن يحقق أي دخل من القسط ، ولكن يتحمل هو مصروفات الفحص والاكتتاب الطبي ، أي أن المؤمن يتحمل خسارة في هذه الحالة . وبالتالي فإننا نستطيع القول بأنه إذا كانت $\phi \leq \phi^{L}$ فإن هذا يعني أن العاملين لن يكونوا ذو درجة خطر عالية ، وبالتالي فإن التأمين الجماعي الاختياري لن يكون مصدر اهتمام لهؤلاء ، وبالتالي لن يكون هناك أي ربح لشركة التأمين المصدرة لهذا العقد .

الشرط الثاني

فشرط $\Omega'\left(q^{G_1*}\right) > 0$ يتحقق إذا – وإذا كان فقط – :

- $q^{H} > q^{G_1*} > q^{L}$
- $q^{M*} - q^{G_1*} > 0$

وبالتالي إذا كانت $\Omega'\left(q^{G_1*}\right) > 0$ وأن معدلات الوفاة لجماعة المؤمن عليهم هي q^{R} ، حيث أن $q^{L} < q^{R} < q^{M*}$ ، فإن المؤمن سوف يحقق نتائج مرضية عندئذ .

وحيث أن :

$$q^{L} = q^{G_1*} = \frac{1+\phi}{2\phi}\left[1-\sqrt{1-\frac{q^{R}}{q^{U}}}\right]$$

وبالتالي تتحدد قيمة q^{R} من المعادلة التالية :

$$q^{R} = q^{L}\left[1+\phi\left(1-q^{L}\right)\right]\frac{1-f}{1+c} \tag{14}$$

$\therefore$ يمكننا القول بأن شرط $q^{L} < q^{R}$ يكون مرضيا وبطريقة تلقائية عندما $\phi > \phi^{L}$.

ويجب التنويه إلى أنه إذا كانت $q^{M*} < q^{R}$ – وهذا دلالة على أن $\Omega'\left(q^{G_1*}\right) = 0$ – ، فإن معادلة رقم (١٢) تتحول إلى :

$$\frac{d\,\rho_1}{d\,q^{M*}} = N(1+c)B\upsilon\Omega\left(q^{M*}\right) > 0$$

بمعنى أن أرباح المؤمن يمكن أن تتزايد أكثر بزيادة q^{M*} ، وبالتالي يمكننا القول بأن إستراتيجية تعظيم الربح لن تتحقق أبدا متى كانت $q^{M*} < q^{R}$. وبالتالي فلكي يكون الشرط $q^{R} < q^{H}$ مقبول ، فإن غير المتساوية التالية يجب أن تكون متوافرة أيضا :

$$\phi < \phi^{H} = \frac{1}{1-q^{L}}\left[\frac{1+c}{1-f}\left(\frac{q^{H}}{q^{L}}\right)-1\right] \tag{15}$$

فإذا كانت $\phi \geq \phi^{H}$ عندئذ يكون $q^{M*} > q^{R} \geq q^{H}$ ، وهذا يناقض الفرضية $q^{M*} < q^{H}$. لذا فإننا سوف نضع قيود عند استخدام غير المتساوية السابقة .

الشرط الثالث

مما سبق يتضح لنا أن q^{M*} تكون مقبولة إذا – وإذا كان فقط – $q^{R} < q^{M*} < q^{H}$. أما بالنسبة لـ $\Omega\left(q^{M*}\right) - \Omega\left(q^{G_1*}\right) > 0$ إلى $q^{L} < q^{M*} < q^{H}$ ،

فإنه يترتب على هذا الشرط أن تكون $q^{M*} - q^{G_1*} > \frac{e}{(1+c)\upsilon}$ ، وبالتالي يجب ألا تكون قيمة e قيمة كبيرة جدا .

ولتحديد الحد الأعلى لـ e فإننا سوف نفترض أن $\Delta(q)$ معرفاً بحيث $\Delta\left(q^{M*}\right) = q^{M*} - q^{G*}$ ، بمعنى أن : $0 \le q < q^{U}$ ، أي أن :

$$\Delta(q) = q - \frac{1+\phi}{2\phi}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{q}{q^{U}}}\right]$$

وبإجراء التفاضل للمتساوية السابقة نصل إلى :

$$\Delta'(q) = 1 - \frac{1+c}{(1-f)(1+\phi)}\left(1 - \frac{q}{q^{U}}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

ويجب ملاحظة أن قيمة $\Delta'(q)$ تتناقص تدريجيا حتى q^{U} ، بينما تتزايد $\Delta(q)$ تدريجيا من الصفر وحتى الحد الأقصى $\Delta^{\max}$ ، حيث أن :

$$\Delta^{\max} = \left(1 - \frac{1+c}{(1-f)(1+\phi)}\right)^{2} q^{U}$$

عندئذ تتناقص قيمة $\Delta\left(q^{U}\right)$ لتصل إلى :

$$\Delta\left(q^{U}\right) = q^{U} - \frac{(1+\phi)}{2\phi}$$

وهناك شرط ضروري لكي يكون الجذر مقبول في معادلة رقم (١٢) ، وهو أن تكون قيمة $e < (1+c)\upsilon\Delta^{\max}$.

ولتميز الفترة بشكل أفضل بحيث تضم قدر مقبول من q^{M*} ، إن يكون من الضروري أن تكون قيمة $\Delta\left(q^{M*}\right) > \frac{e}{(1+c)\upsilon}$. وبفرض أن q_2^{Δ} , q_1^{Δ} هي

جذور المعادلة $\Delta(q)=\frac{e}{(1+c)\upsilon}$ بمعلومية $e<(1+c)\upsilon\Delta^{\max}$ ، بحيث أن $q_1^{\Delta}\leq q_2^{\Delta}$.

فمن الواضح أن هذه الجذور حقيقية ومعطاة من العلاقة التالية :

$$q_1^{\Delta},q_2^{\Delta}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{f+c}{(1-f)\phi}\right)+\frac{e}{(1+c)\upsilon}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{f+c}{(1-f)\phi}\right)^2-\frac{4e}{\upsilon\phi(1-f)}}$$

ولضمان أن تكون $\Delta(q)>\frac{e}{(1+c)\upsilon}$ فئة جزئية من الفترة $\left(q^R,q^H\right)$ ، فإن الشروط السابقة يجب أن تأخذ في الاعتبار بحيث أن :

$q_1^{\Delta}<q^H$

$q_2^{\Delta}>q^R$

وعموما نستطيع القول بأن q^{M*} – إذا وجدت – فإنها سوف تقع في الفترة $\left(\max\{q^R,q_1^{\Delta}\},\min\{q^H,q_2^{\Delta}\}\right)$. ولكن ماذا يحدث إذا لم توجد قيمة مرضية لـ q^{M*} ؟ هذا قد يتحقق – على سبيل المثال – في مثل هذه الحالات :

- إذا كانت قيمة e كبيرة جدا ، أي $e\geq(1+c)\upsilon\Delta^{\max}$.
- إذا كانت جذور كل من $q_1^{\Delta},q_2^{\Delta}$ موجودة ولكن $q_1^{\Delta}\geq q^H$ أو $q_2^{\Delta}\leq q^R$.
- إذا كانت $q_1^{\Delta}<q^H$ ، $q_2^{\Delta}>q^L$ ولكن ليس $q^{M*}\in\left(q^R,q^H\right)$.

وبغض النظر عن السبب ، عندما تكون المعادلة رقم (١٢) ليس لها حل فإن ρ_1 كما تم تعريفها مسبقا في معادلة رقم (٩) تكون غير متناقصة ، كما أن q^{M*} تتزايد في الفترة $\left(q^R,q^H\right)$. وبالتالي فإن المؤمن سوف يحقق أقصى ربح متوقع عن طريق وضع $q^{M*}=q^H$. وبالتالي فإن كل شخص هو في الحقيقة قابل للتأمين عليه الآن ، والمؤمن هنا سوف يتحمل تكاليف فحص واكتتاب طبي ليس لها

مبرر . وبالتالي نستطيع أن نقول أنه إذا كانت المعادلة رقم (١٢) ليس لها حل مقبول ، فإن الحد الأقصى لأرباح المؤمن سوف يزيد بقدر أكبر إذا تم إزالة مصروفات الفحص والاكتتاب الطبي وقدم الحماية التأمينية لكل شخص في المجموعة طالبة التأمين المؤقت الاختياري.

المبحث الثاني
حالة عدم استثناء أي مستخدم من التغطية التأمينية

في هذه الحالة تكون قيمة $\Omega'(q^M) = 0$ ، وبالتالي فإن الفرضية رقم (٩) والتي تناولت كل من $q^M \leq q^L$ ، $q^M \geq q^H$ سوف يترتب عليها النتائج التالية :

- حالة $q^M \leq q^L$ تكون غير مهمة ، لأنها سوف تؤدي إلى رفض كل المتقدمين للتأمين عليهم ، وبالتالي لا يوجد تأمين ولا يوجد دخل ***no insurance and no income*** ، وبالتالي سوف يكون هناك خسارة مؤكدة للمؤمن تعادل $N \times e$ إذا قدم هذا النوع من التأمين بهذه الشروط.
- حالة $q^M \geq q^H$ سوف تؤدي إلى قبول كل المستخدمين . وحيث أن المؤمن يعرف Ω ، وبالتالي فهو لن يتحمل أي مصروفات متعلقة بالفحوصات الطبية . وبالتالي فإن دوال الربح يجب أن تعدل على النحو التالي :

$$e = 0 \ ,$$
$$q^M = q^H ,$$
$$\Omega(q^M) = 1$$

وبالتالي تكون دالة الربح الناتجة هي :

$$\rho_2 = N.G_2(1-f)\left[1-\Omega\left(q^{G_2}\right)\right] - N(1+c)B\upsilon\int_{q^{G_2}}^{q^H} q \, \mathrm{d}\Omega(q) \qquad (16)$$

وهذه المعادلة تعتمد الآن فقط على قيمة G_2 وبالتالي يمكننا اشتقاق معادلة الطلب الأولي كما يلي :

$$\frac{\mathrm{d}\,\rho_2}{\mathrm{d}\,G_2} = N(1-f)\left[1-\Omega\left(q^{G_2}\right)-\left(G_2-\frac{(1+c)B\upsilon q^{G_2}}{1-f}\right)\Omega'\left(q^{G_2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G_2}q^{G_2}\right] \ldots(17)$$

وبالتالي يكون هدف المؤمن هو إيجاد قيمة G_2^* المقبولة والتي تعظم ρ_2 .

وهذا يمكن أن يتحقق بإحدى أسلوبين :

- البحث في الفترة $\left[G^L, G^H\right]$ عن قيمة G_2^* والتي تعظم ρ_2 ، أو
- أيجاد $G_2^* \in \left[G^L, G^H\right]$ والتي تكون بمثابة جذر المعادلة رقم (١٧) وهذا يعظم ρ_2 أيضا .

وينوه الباحث هنا أيضا إلى أن المدخل الثاني يكون أكثر عمقا وذو درجة تفسير وتوضيح أكثر .

ويمكن أن نلاحظ أن هناك شرطان ضروريان يجب أن يتوافرا حتى يكون هناك وجود لجذر المعادلة رقم (١٧) وهما :

الشرط الأول : أن تكون قيمة

$$\Omega'\left(q^{G_2}\right) > 0$$

وهذه تحدث تلقائيا لأي $G_2^* \in \left[G^L, G^H\right]$.

الشرط الثاني : أن تكون

$$G_2 - \frac{(1+c)B\upsilon q^{G_2}}{(1-f)} > 0$$

وهذه تحدث إذا كانت – وكانت فقط – $0 < G_2 < G^W$.

حيث أن :

$$G^W = B\upsilon\left(\frac{1+c}{1-f}\right)\left(1-\frac{f+c}{(1-f)\phi}\right)$$

ولضمان أن تكون $G_2 - \frac{(1+c)B\upsilon q^{G_2}}{(1-f)} > 0$ لأي قيمة مقبولة لـ G_2 ، فإن هذا يتطلب أن تكون $G^W > G^H$. ويمكن إثبات أن $G^W > G^H$ إذا كان – وكان فقط – :

$$\phi^L < \phi < \frac{1+c}{(1-f)q^H}$$

إن شرط $\phi < \frac{(1+c)}{(1-f)q^H}$ يكون مرضيا وبطريقة تلقائية في التطبيق العملي عندما تؤول قيمة q^H إلى قيمة صغيرة جدا .

أما إذا كان لا يوجد جذر مقبول لمعادلة رقم (١٧) فإن الطرف الأيمن في هذه المعادلة يكون موجب دائما ، أيضا نجد أن دالة الربح تتزايد كلما تزايدت G_2 إلى أن تصل إلى G^H . وعندما تكون $G_2 = G^H$ فإن قيمة الربح تكون مساوية للصفر . بمعنى أخر : إذا كان لا يوجد جذر مقبول لمعادلة رقم (١٧) ، عندئذ فإن أقصى ربح محتمل يكون مساويا للصفر .

الفصل الرابع

الدوال غير الخطية وتحديد أقصى ربح محتمل

خطوات تحديد أقصى ربح محتمل

لتحديـد أقصـى ربـح محتمـل للمـؤمن ***Determination of the maximum expected profit*** بمعلومية المعالم $B, c, f, \phi, q^L, q^H, \upsilon$ فإننا نجري الخطوات التالية :

الخطوة (١)

المؤمن يستطيع أن يحدد قيمة مرتفعة للقسط بحيث لا يقوم أي مستخدم بالتقدم بطلب الحصول على التأمين وهذا إنتاج بدون دخل ، وهذا الوضع يمكن أن نعبر عنه بـ $\rho_1^* = \rho_2^*$.

الخطوة (٢)

حساب القيمة ϕ^L وبالتالي نتوقع إحدى نتيجتين وهما :

١ . إذا كانت $\phi \leq \phi^L$ عندئذ تكون قيمة ϕ منخفضة جدا ، وبالتالي لن يكون هناك تأمين ممكن . أي أن المؤمن يتوقف عن تقديم التغطية التأمينية لهذه المجموعة .

٢ . إذا كانت $\phi > \phi^L$ ، فإن هذا يعنى الانتقال إلى الخطوة رقم (٣) .

الخطوة (٣)

حساب القيمة ϕ^H وبالتالي نتوقع إحدى نتيجتين وهما :

١ . إذا كانت $\phi \geq \phi^H$ عندئذ تكون قيمة ϕ مرتفعة جدا ، وهذا يعنى الانتقال إلى الخطوة رقم (٧).

٢ . إذا كانت $\phi < \phi^H$ ، وهذا يعنى الانتقال إلى الخطوة رقم (٤) .

الخطوة (٤)

حساب القيمة $(1+c)\upsilon\Delta^{\max}$ وبالتالي نتوقع إحدى نتيجتين وهما :

١. إذا كانت $e<(1+c)\upsilon\Delta^{\max}$ ، وهذا يعنى الانتقال إلى الخطوة رقم (٥).

٢. إذا كانت $e\geq(1+c)\upsilon\Delta^{\max}$ ، وهذا يعنى الانتقال إلى الخطوة رقم (٧) .

الخطوة (٥)

حساب القيمة q^R وجذور المعادلة $\Delta(q)=\dfrac{e}{(1+c)\upsilon}$ بمعلومية $e<(1+c)\upsilon\Delta^{\max}$ وهي q_1^Δ , q_2^Δ ، بحيث أن $q_1^\Delta \leq q_2^\Delta$.

الخطوة (٦)

تكون هذه الجذور مقبولة إذا وقعت في الفترة $\left(\max\{q^R,q_1^\Delta\},\min\{q^H,q_2^\Delta\}\right)$ بحيث :

١. إذا كانت الفترة موجودة والجذور موجودة ، نقوم بحساب كل من : $\rho_1^*\ G_1^*,$ باستخدام معادلة رقم (٨) ومعادلة رقم (٥) على الترتيب .

٢. ما عدا ذلك يعنى الانتقال إلى الخطوة رقم (٧) .

الخطوة (٧)

بوضع :

$$e=0\ ,$$
$$q^M=q^H,$$
$$\Omega(q^M)=1$$

الخطوة (٨)

بحل المعادلة رقم (١٧) بالنسبة لـ G_2^* بحيث $0<G_2^*<\min\{G^H,G^W\}$.

الخطوة (٩)

بحساب ρ_2^* باستخدام معادلة رقم (١٦) .

الخطوة (١٠)

١. إذا كانت $\rho_1^* \geq \rho_2^*$ فإن هذا يعني أن الحد الأقصى المتوقع لربح المؤمن سوف يتم الحصول عليه باستخدام الزوج (G_1^*, q^{M*}) .

٢. بخلاف ذلك فإن أقصى ربح متوقع للمؤمن يتم الحصول عليه باستخدام الزوج (G_2^*, q^H) ، ويتم إزالة مصروفات الفحص والاكتتاب الطبي eB .

٣. أقصى ربح متوقع للمؤمن يكون مساويا لـ ρ^* حيث أن :

$$\rho^* = \max\{0, \rho_1^*, \rho_2^*\}$$

توضيح عملية تحقيق الحد الأقصى للأرباح .

لكي نستطيع أن نتصور مجموعة الأفكار التي تم تقديمها مسبقا ، نفترض أن هناك حالة وجود مؤمن ما على غير علم بشكل دالة تركيب لجماعة المؤمن عليهم ***the structure function*** ، ولكن هو يعرف تماما كل من q^L, q^H . في مثل هذه الحالات يكون المؤمن ذو قناعة تامة لافتراض أن دالة التركيب هذه تأخذ شكل التوزيع المعتدل ، بمعنى آخر :

$$\Omega'(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{q^H - q^L} & if\ \ q^L \leq q \leq q^H \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

,

$$\Omega(q) = \begin{cases} 0 & if\ \ q \leq q^L \\ \dfrac{q - q^L}{q^H - q^L} & if\ \ q^L < q < q^H \\ 1 & if\ \ q \geq q^H \end{cases}$$

وبالتالي يمكن تبسيط الدالة العامة للربح (غير المعظمة) والمعطاة في معادلة رقم (٥) إلى :

$$\rho = \frac{N}{q^{H} - q^{L}} \begin{bmatrix} G(1-f)\left(q^{M} - q^{G}\right) - eB\left(q^{H} - q^{G}\right) \\ -\frac{1}{2}(1+c)B\upsilon\left(\left(q^{M}\right)^{2} - \left(q^{G}\right)^{2}\right) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

وكما سبق اتضح لنا أن هناك حالتين لتحقيق الحد الأقصى للأرباح ، وسوف نتعرض لهما هنا مرة أخرى ولكن في شكل معادلات رياضية وذلك على النحو التالي :

الحالة الأولى: حالة استثناء بعض العاملين من التغطية التأمينية.

في هذه الحالة تكون $\Omega'\left(q^{M}\right) \neq 0$ ، وحيث أن إن إستراتيجية تعظيم الربح لن تتحقق أبدا متى كانت $q^{M*} < q^{R}$ ، وبالتالي يمكننا كتابة معادلة الربح (معادلة رقم (٩)) ومعادلة الطلب الأولي (معادلة رقم (١٢)) على النحو التالي :

فمعادلة الربح تكون :

$$\rho_1 = \frac{N(1+c)B\upsilon}{q^{H} - q^{L}} \left[\frac{1}{2}\left(q^{M*} - q^{G_1*}\right)^{2} - \frac{\left(q^{H} - q^{G_1*}\right)e}{(1+c)\upsilon} \right] \tag{19}$$

ومعادلة الطلب الأولي تكون :

$$q^{M*} - q^{G_1*} - \frac{(1+c)B\upsilon}{1-f}\left(q^{M*} - q^{G_1*} - \frac{e}{(1+c)\upsilon}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,G_1} q^{G_1*} = 0 \tag{20}$$

حيث أن q^{M*} (إذا وجدت) تقع في الفترة $\left(q^{R}, q^{H}\right)$.

وبالتعويض عن قيمة q^{G_1*} كما في معادلة رقم (١٠) ، وعن قيمة $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,G_1} q^{G_1*}$ كما في معادلة رقم (١١) ، وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة رقم (٢٠) ينتج أن :

$$y = \left(1 - \frac{q^{M*}}{q^{U}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (21)$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة على المعادلة السابقة ، فإن معادلة الطلب الأولي المكافئة تكون على النحو التالي :

$$\left[(1-2\rho)+2\rho y - y^2\right](\rho - y) = \frac{e\rho}{(1+c)\upsilon q^{U}} \qquad (22)$$

حيث أن :

$$\rho = \frac{(1+c)}{(1-f)(1+\phi)}$$

والطرف الأيسر في المعادلة رقم (٢٢) هو عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ***the cubic polynomial*** في y ، ويكون لها ثلاثة جذور حقيقية متميزة ***three real distinct roots*** وهى :

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = \rho < 1$$
$$y_3 = 1 - 2\rho$$

ولضمان $1-2\rho < \rho$ ، بمعنى أن : $\frac{1}{3} < \rho < 1$ ، فإنه يجب توافر الشرط التالي :

$$\phi^{L} < \phi < \frac{3(1+c)}{(1-f)} - 1$$

وعموما نحن لا نستطيع الحصول على حل واضح لجذور معادلة رقم (٢٢) إلا عندما $e = 0$. فعندما $e = 0$ فإن الجذر الوحيد المقبول يكون $y = \rho$ ، لأن شرط $\left(q^{H} - q^{G_1^*}\right) > 0$ يجب أن يتحقق لتعظيم الربح . ولضمان $y = \rho$ وإنتاج حل مقبول ، فإن شرط $q^{R} < q^{M^*} < q^{H}$ والذي يدل ضمناً على $q^{R} < q^{M^*} = \left(1 - \rho^{2}\right)q^{U} < q^{H}$ يجب أن يتحقق . أي عندما :

- $q^{R} < \left(1 - \rho^{2}\right)q^{U}$

لكل $\phi > \phi_1$ ،

وعندما أيضا :

- $\left(1 - \rho^{2}\right)q^{U} < q^{H}$

لكل $\phi < \phi_2$.

حيث أن : ϕ_1, ϕ_2 – $\phi_1 < \phi_2$ – بمثابة ثوابت يمكن الحصول عليهما من العلاقات التالية :

$$\phi_1 = \frac{1 - 2q^{L}}{1 - 4q^{L}\left(1 - q^{L}\right)}\left[\sqrt{\left(1 + 2\phi^{L}\right)\left(1 - \frac{1}{2}(f - c)\right)\left(\frac{\left(1 - q^{H}\right)\left[1 - 4q^{L}\left(1 - q^{L}\right)\right]^{2}}{(1 - f)\left(1 - 2q^{L}\right)^{2}}\right)} - 1\right]$$

$$\approx \phi^{L}\,\frac{\left[1 - \frac{1}{2}(f - c)\right]\left[1 - 4q^{L}\left(1 - q^{L}\right)\right]}{(1 - f)\left(1 - 2q^{L}\right)},$$

$$\phi_2 = \left[1 - \frac{2(1+c)q^H}{(1-f)}\right]\left[\sqrt{(1+2\phi^L)\left(\frac{(1-q^H)\left[1-\frac{1}{2}(f-c)\right]}{(1-f)\left[1-\frac{2(1+c)q^H}{(1-f)}\right]^2}-1\right)}-1\right]$$

$$\approx \phi^L \frac{\left[1-\frac{1}{2}(f-c)\right]\left[1-q^H\right]}{(1-f)\left[\left(1-\frac{2(1+c)q^H}{(1-f)}\right)\right]}$$

وعندما تكون قيم كل من f, c, q^L قيم صغيرة ، عندئذ تصل قيمة ϕ_1 إلى قيمة ϕ^L ، بينما تقترب قيمة ϕ_2 من قيمة ϕ^L وذلك عند القيم الصغيرة لـ q^H ، ولكن تتزايد كلما تزايدت q^H .

ولكي نستطيع أن نحقق توزيع منتظم من الوفيات ***uniform mixture mortality distribution*** ، فإن هناك مدى ضيق من قيم ϕ والذي يسمح بحل مقبول ، هذا المدى يزيد كلما زادت q^H . فإذا كانت $\phi \le \phi_1$ عندئذ لن يكون من المربح أبدا للمؤمن أن يبيع تأمين جماعي اختياري ، لأن العاملين ليسوا ذوي خطر كافي يشجعهم على شراء التأمين الجماعي ، بينما إذا كانت $\phi \ge \phi_2$ عندئذ يكون لدى العاملين خطر مرتفع وبالتالي يكون من الأفضل للمؤمن أن يعرض التأمين على كل العاملين بدون اكتتاب طبي .

وعندما تكون $e>0$ فإن حل المعادلة رقم (٢٢) يمكن أن يحقق سلسلة ذات قوى معينة a باستخدام صيغة لاجرانج الموسعة . وتكون كتابة معادلة رقم (٢٢) على الشكل التالي :(١)

$$y=\rho+\frac{e\rho}{(1+c)\upsilon q^{U}}\left(\frac{1}{(y-1)[y-(1-2\rho)]}\right) \tag{23}$$

وينتج الحل $y^{*}(e)$ بمعلومية :

$$y^{*}(e)=\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{e\rho}{(1+c)\upsilon q^{U}}\right)^{n}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\rho^{n-1}}\left[(\rho-1)^{-n}(3\rho-1)^{-n}\right]$$

حيث e تكون دائما أقل من **0.002** ، والحل التقريبي يمكن الحصول عليه إذا تم إهمال بعض الشروط السابقة الواجب توافرها في e^{2} ، وذلك بافتراض أن :

$$y^{*}(e)\approx\rho-e\xi_{1}(\rho)$$

حيث أن :

$$\xi_{1}(\rho)=\frac{\rho}{(1+c)\upsilon q^{U}(1-\rho)(3\rho-1)}$$

هذا التقريب ينتج عنه :

---

(١) يمكن الرجوع إلى :

- **Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York (1964).**
- **A. Eagle, Series for all the roots of a trinomial equation, *The American Mathematical Monthly* 47 (1939) (7), pp. 422–425**
- **A. Eagle, Series for all the roots of the equation $(z-a)^{m}=k(z-b)^{m}$, *The American Mathematical Monthly* 48 (1939) (7), pp. 425–428.**

$$q^{M*}(e)=\min\left\{q^{H},\left[1-\left(y^{*}(e)\right)^{2}\right]q^{U}\right\}$$

,

$$q^{G_1*}(e)=\frac{1+\phi}{2\phi}\left[1-\sqrt{\frac{q^{M*}(e)}{q^{U}}}\right]$$

,

$$G_1^{*}(e)=\frac{(1+c)B\upsilon}{1-f}q^{M*}(e)$$

وبالتالي فإن أقصى ربح متوقع ρ_1^{*} الذي تم تقديره من معادلة رقم (١٩) يمكننا الآن التوصل إلى قيمته .

الحالة الثانية: حالة عدم استثناء أي من العاملين من التغطية التأمينية.

في هذه الحالة تكون $\Omega'(q^{M})=0$ ، وبالتالي فإن كل شخص يكون قابل للتأمين عليه بصورة تلقائية ، فالمؤمن يسقط كل عمليات الفحص والاكتتاب الطبي ، ويحدد قيمة G_2 لكي يعظم أرباحه لكل $G_2 \in (G^{L},G^{H})$ ، وبالتالي فإن قيمة الربح والطلب الأولي يمكن الحصول عليهما من خلال المعادلات التالية :

فمعادلة الربح تكون :

$$\rho_2=N(1-f)\frac{q^{H}-q^{G_2}}{q^{H}-q^{L}}\left[G_2-\left(\frac{(1+c)B\upsilon}{2(1-f)}\right)\left(q^{H}+q^{G_2}\right)\right] \tag{24}$$

ومعادلة الطلب الأول تكون :

$$q^{H}-q^{G_2}-\left(G_2-\frac{(1+c)B\upsilon q^{G_2}}{1-f}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,G_2}q^{G_2}=0 \tag{25}$$

وبالتعويض عن قيمة q^{G_2*} كما في معادلة رقم (٣) وبالتعويض عن قيمة $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,G_2}q^{G_2*}$ كما في معادلة رقم (٤) في معادلة رقم (٢٥) ينتج أن :

$$Z = \left(1 - \frac{G_2}{G^U}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على المعادلة التالية ، والتي تكون من الدرجة الثانية ***quadratic equation*** :

$$3Z^2 - 2\left(1 + \rho - \frac{2\phi q^H}{1+\phi}\right)Z + (2\rho - 1) = 0 \qquad (26)$$

والتي يكون لها جذران حقيقيان متميزان . ويكون جذر تعظيم الربح Z^* أحد الجذور الذي ينتج عنه اشتقاق طلب ثاني سالب بالنسبة لـ G_2 عندما $Z = Z^*$. وبالتالي نحصل على الآتي :

$$Z^* = \frac{1}{3}\left(1 + \rho - \frac{2\phi q^H}{1+\phi}\right)\left[1 + \sqrt{1 - \frac{3(2\rho - 1)}{\left[1 + \rho - \left(\frac{2\phi q^H}{1+\phi}\right)\right]^2}}\right]$$

وبالتالي تكون معادلات كل من قيمة القسط – الذي يعظم أرباح المؤمن – ومعدلات الوفاة المكافئة هي :

$$G_2{}^* = \left[1 - (Z^*)^2\right]G^U \qquad (27)$$

,

$$q^{G_2{}^*} = \frac{1+\phi}{2\phi}\left(1 - Z^*\right) \qquad (28)$$

وبالتالي نستطيع التوصل إلى أقصى ربح متوقع أيضا ρ_2^* .

النتائج والتوصيات

أولا : النتائج

في ضوء الدراسة السابقة توصل الباحث إلى النتائج التالية :

١. الحد الأقصى للقسط G_1^* يكون كافيا لتغطية القسط الإكتواري العادل + المصروفات التي تمثل نسبة من القسط + مصروفات المطالبة بالوفاة لمعظم العاملين المقبولين.

٢. الحد الأقصى للقسط G_1^* يكون مستقلا عن عدد مفردات المجموعة المغطاة N .

٣. إذا كانت $\phi \le \phi^L$ فإن هذا يعني أن العاملين لن يكونوا ذو درجة خطر عالية ، وبالتالي فإن التأمين الجماعي الاختياري لن يكون مصدر ربح للمؤمن .

٤. يمكن النظر إلى العبء θ على أنه مقياس لمدى قابلية وميول المستخدم أو العامل نحو شراء التأمين . وبالتالي فإن المستخدم ذو معدل الوفاة الأعلى يقبل على شراء التأمين بدرجة أعلى من هؤلاء ذوي معدلات الوفاة الأقل وبغض النظر عن قيمة θ .

٥. إن إستراتيجية تعظيم الربح لن تتحقق أبدا متى كانت $q^{M^*} < q^R$.

٦. هناك شرط ضروري لكي يكون الجذر مقبول في معادلة رقم (١٢) ، وهو أن تكون قيمة $e < (1+c)\upsilon\Delta^{\max}$.

٧. q^{M^*} – إذا وجدت – فإنها سوف تقع في الفترة $\left(\max\{q^R, q_1^\Delta\}, \min\{q^H, q_2^\Delta\}\right)$.

٨. إذا كانت المعادلة رقم (١٢) ليس لها حل مقبول ، فإن الحد الأقصى لأرباح المؤمن سوف يزيد بقدر أكبر إذا تم إزالة مصروفات الفحص والاكتتاب الطبي وتقديم الحماية التأمينية لكل شخص في المجموعة طالبة التأمين المؤقت الاختياري .

٩. إذا كان لا يوجد جذر مقبول لمعادلة رقم (١٧) ، عندئذ فإن قيمة أقصى ربح محتمل تكون مساويا للصفر .

١٠. لكي نستطيع أن نحقق توزيع منتظم من الوفيات ، فإن هناك مدى ضيق من قيم ϕ والذي يسمح بحل مقبول ، هذا المدى يزيد كلما زادت قيمة q^H .

١١. إذا كانت $\phi \leq \phi_1$ عندئذ لن يكون من المربح أبدا للمؤمن أن يبيع تأمين جماعي اختياري ، لأن العاملين ليسوا ذوي خطر كافي يشجعهم على شراء التأمين الجماعي .

١٢. بينما إذا كانت $\phi \geq \phi_2$ عندئذ يكون لدى العاملين خطر مرتفع وبالتالي يكون من الأفضل للمؤمن أن يعرض التأمين على كل العاملين بدون اكتتاب طبي .

١٣. يمكن استخدام مبدأ التباين الحسابي بدلا من نظرية المنفعة لتحديد الحد الأقصى للسعر الذي يمكن أن يقبله العامل أو المستخدم .

١٤. يميل الاقتصاديون أكثر لاستعمال دالة منفعة المستخدم ، والذي يطلق عليه الإكتواريون مبدأ المنفعة الصفري ***principle of zero utility*** . ومن الواضح أن استخدام دوال المنفعة له تأثير مبدئي على المعادلات الخاصة بـ $\pi(q,B), q^G$.

ثانيا : التوصيات

في ضوء الدراسة السابقة يوصي الباحث بالآتي :

١. ضرورة أن يتم إصدار عقد التأمين المؤقت الجماعي الاختياري على أساس سنوي قابل للتجديد ، حيث يتم دفع القسط في بداية سنة الوثيقة ، ودفع مزايا حال الوفاة في نهاية سنة الوثيقة التي وقعت فيها الوفاة ، لأن هذا يعظم من أرباح المؤمن .

٢. يجب إعادة النظر في طرق تسعير التأمين التقليدية الحالية والبحث على طرق جديدة تواكب النظريات الاقتصادية الحديثة .

٣. يجب تعديل معدل الفائدة الفني الذي على أساسه يتم تقدير قسط التأمين في نهاية كل سنة من سنوات العقد وفى ضوء النتائج الفعلية .

٤. ضرورة وجود حد أدنى للقسط وكذلك حد أقصى ، وفى نهاية السنة يتقاسم المؤمن مع جماعة المؤمن عليهم المتعاقد معهم الأرباح والخسائر حسب نتائج أعمال شركة التأمين الفعلية عن السنة المنقضية وبعد سداد المزايا المستحقة وتكوين المخصصات والاحتياطيات المناسبة.

٥. ضرورة الحد من تأثير الاختيار ضد مصلحة شركة التأمين ، وذلك من خلال قيام المؤمن بوضع حد أقصى مقبول لمعدلات الوفاة q^M .

٦. ضرورة قيام المؤمن بعملية اكتتاب في الخطر بغرض معرفة مستوي الوفاة المقدم له q . فإذا كانت $q > q^M$ فإنه يجب على المؤمن رفض هذه التغطية.

٧. يجب إجراء دراسات متعمقة لمعرفة أسباب الاختلافات في معدلات الوفيات ضمن مجموعة عمرية واحدة أو خلال مدى عمري معين .

٨. يجب وجود حد أدنى من العوامل عند تسعير التأمين المؤقت الجماعي الاختياري مثل:

- الوضع التدخيني .
- الفئة العمرية لطالب التأمين على الحياة (30-34,35-39,.....) .
- النوع .
- الدخل .
- السلالة .

ولا شك أن إتباع هذه الطريقة سوف يؤدي إلى إظهار الاختلافات الهامة بين جماعة المؤمن عليهم لدى أي فئة خطر

٩. يجب توافر جداول وفيات لجماعة العاملين خاصة بالسوق المصرية تكون مستمدة من الخبرة الفعلية والمشاهدات العملية للمجتمع محل الدراسة. لأن ذلك سوف يؤدى إلى معرفة احتمالات الوفاة حسب فئات الأعمار المختلفة وحسب النوع وحسب الصناعة وكذلك معرفة توقع الحياة .

١٠. ضرورة الاهتمام بتسعير هذا النوع من التأمين بسبب الاتجاه المتزايد للتوسع في إنشاء المشروعات الصناعية والتجارية والخدمية الخاصة والتي تستوعب الكثير من الأيدي العاملة ، ويكون صاحب العمل هو المسئول عن تعويض هؤلاء أو ذويهم عند تحقق خطر الوفاة لأي منهم ، وبالتالي يستطيع صاحب العمل نقل هذا الخطر إلى شركة التأمين مقابل قسط مناسب.

المراجـــع

1. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York (1964).
2. A.F. Shapiro, A stochastic model for determining the contingency charge in group life insurance, *Journal of Risk and Insurance* 43 (1976) (3), pp. 463–486.
3. A. Eagle, Series for all the roots of a trinomial equation, *The American Mathematical Monthly* 47 (1939) (7), pp. 422–425
4. A. Eagle, Series for all the roots of the equation $(z-a)^m=k(z-b)^m$, *The American Mathematical Monthly* 47 (1939) (7), pp. 425–428.
5. A. Monheit and B. Schone, How has small group market reform affected employee health insurance coverage?, *Journal of Public Economics* 88 (2004) (1–2), pp. 237–254.
6. B.P. Carlin and T.A. Louis, Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis, Chapman & Hall, London (1996).
7. Canadian Institute of Actuaries, Group Mortality Study: Final Report for the 1989 Experience Year. Reprinted in Transactions. Society of Actuaries, 1995–1996 Reports.
8. C. Wilson, A model of insurance markets with incomplete information, *Journal of Economic Theory* 12 (1977), pp. 167–207.
9. C. Gollier, The Economics of Risk and Time, MIT Press, Cambridge, MA (2001).
10. C.L. McClenahan, Ratemaking, *Foundations of Casualty Actuarial Science* (3rd ed), Casualty Actuarial Society, Arlington, VA (1996), pp. 25–90.
11. D. Kliger and B. Levikson, Pricing insurance contracts–an economic viewpoint, *Insurance: Mathematics and Economics* 22 (1998), pp. 243–249.
12. D. Atkinson and J. Dallas, Life Insurance Products and Finance, The Actuarial Foundation, Schaumburg, ILL. (2000).

13. Dionne, G., Harrington, S.E. (Eds.), Foundations of Insurance Economics. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA. (1992).
14. E.T. Whittaker and G.N. Watson, A Course in Modern Analysis (4th ed), Cambridge University Press, Cambridge, England (1927) (reprinted in 1988).
15. G.A. Akerlof, The market for ‘lemons’: quality uncertainty and the market mechanism, *Quarterly Journal of Economics* 84 (1970), pp. 488–500.
16. Gerber, H.U., An Introduction to Mathematical Risk Theory. S.S. Huebner Foundation, Philadelphia, PA. Distributed by Irwin, Inc., Homewood, ILL. (1979) .
17. G. Jensen and M. Morrisey, Small group reform and insurance provision by small firms, 1989–1995, *Inquiry* 36 (1999) (2), pp. 176–187.
18. H. Buhlmann , Mathematical Models in Risk Theory, Springer-Verlag, New York (1970).
19. I. Macho-Stadler and J.D. Pérez-Castrillo, An Introduction to the Economics of Information (2nd ed), Oxford University Press, Oxford (2001).
20. J.C. Hickman and R.B. Miller, Insurance premiums and decision analysis, *Journal of Risk and Insurance* 37 (1970) (4), pp. 567–578.
21. J.T. Lange, Application of a mathematical concept of risk in property-liability insurance ratemaking, *Journal of Risk and Insurance* 36 (1969) (4), pp. 383–391.
22. J.W. Pratt, Risk aversion in the small and in the large, *Econometrica* (1964), pp. 122–136.
23. A.F. Shapiro, A Bayesian approach to persistency in the projection of retirement costs, *Transactions of the Society of Actuaries* 30 (1979), pp. 337–365.
24. J.W. Vaupel, K.G. Manton and E. Stallard, The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality, *Demography* 16 (1979), pp. 439–454.

25. K. Simon, State Profiles of Small Group Health Insurance Reform, 1990–1999, University of Maryland (2000) Typescript.
26. K. Simon, Adverse Selection in Health Insurance Markets? Evidence from State Small Group Health Insurance Reforms, Cornell University (2004) Typescript.
27. L. Kane, Alternative/simplified underwriting for life and health products, *Record of the Society of Actuaries* 27 (2002) (3) Session 130PD.
28. M. Spence, Product differentiation and performance in insurance markets, *Journal of Public Economics* 10 (1978), pp. 427–447.
29. M. Rothschild and J. Stiglitz, Equilibrium in competitive insurance markets, *Quarterly Journal of Economics* 90 (1976), pp. 629–649.
30. M.J. Goovaerts, F. de Vylder and J. Haezendonck, Insurance Premiums, North-Holland, Amsterdam (1984).
31. M.S. Marquis and S. Long, Effects of 'Second Generation' small group health insurance market reforms, *Inquiry* 38 (2001/2002), pp. 365–380.
32. N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones and C.J. Nesbitt, Actuarial Mathematics (2nd ed), Society of Actuaries, Schaumburg, ILL. (1997).
33. M.D. Miller, The commissioners 1960 standard group mortality table and 1961 standard group life insurance premium rates, *Transactions of the Society of Actuaries* 13 (1961), pp. 586–606.
34. P. Booth, R. Chadburn, D. Cooper, S. Haberman and D. James, Modern Actuarial Theory and Practice, Chapman & Hall/CRC Press, London (1999).
35. R.J. Finger, Risk Classification, *Foundations of Casualty Actuarial Science* (3rd ed), Casualty Actuarial Society, Arlington, VA (1996), pp. 231–276.
36. R.A. Hummer, R.G. Rogers and I.W. Eberstein, Socio demographic differentials in adult mortality: a review of

analytic approaches, *Population and Development Review* 24 (1998) (3), pp. 553–578

37. R. Jureidini and K. White, Life insurance, the medical examination and cultural values, *Journal of Historical Sociology* 13 (2000) (2), pp. 191–214.
38. R.L. Burden and J.D. Faires, Numerical Analysis (7th ed), Brooks/Cole Publishing Company, New York (2001).
39. S.T. Carter, Estimating claim costs for life benefits. In: W.F. Bluhm, Editor, *Group Insurance* (3rd ed), ACTEX Publications, Inc., Winstead, CT (2000), pp. 399–425.
40. S.A. Chalke, Macro pricing: a comprehensive product development process, *Transactions of the Society of Actuaries* 33 (1991), pp. 137–194.
41. Simon, K. 1999 “The Impact of Small-Group Health Insurance Reform.” Dissertation. Department of Economics, University of Maryland.
42. W.F. Bluhm, Group Insurance, 3rd ed. ACTEX Publications, Inc., Winstead, CT. (2000) .