الانحرافات المتوسطة لمقدر الإمكان الأكبر لتوزيعات مستقلة

دكتور/ طارق محمد شمس الدين عبد اللطيف(*)

ملخص البحث :

سيتناول الباحث دراسة الانحرافات المتوسطة لمقدر الإمكان الأكبر لتوزيعات مستقلة غير متماثلة ، وذلك تحت تحقق شروط معينة، والتطبيق بمثال على هذه الدراسة ،مع الإلمام بدراسة الموضوعات التالية :

دالة الإمكان الأكبر ، ومعلومات فيشر ، والانحرافات المتوسطة ، وخاصية الاتساق لمقدر الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_n$.

١ – مقدمة:

ليكن $\{X_k, k \geq 1\}$ سلسلة لمتغيرات عشوائية مستقلة ، ودوال توزيعاتها التراكمية هي $F_k(x,\theta)$ ، حيث $\theta \in \Theta$ ، وθ هي المعلمة المراد تقديرها، Θ هي فراغ المعلمة .

تحتوي الدراسة الحالية على بعض من النماذج الإحصائية مثل النماذج الخطية العامة (Nelder and Wedderburn,1972) ، ونماذج المراقبة العشوائية غير الكاملة أو الناقصة (Elperine and Gertsbak,1988) . مقدر الإمكان الأكبر (MLE) للمعلمة θ يرمز له بالرمز $\hat{\theta}_n = \theta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ، وخاصية الاتساق لمقدر الإمكان الأكبر $\hat{\theta}_n$ تم دراستها عن طريق (Chao,1976) وحالة asymptotic normality بحث عن طريق (Hoadley,1971) .

(*) قسم الإحصاء – كلية التجارة (بنين) – جامعة الأزهر.

وتعرف الانحرافات المتوسطة للمقدر $\hat{\theta}_n$ بأنها القيمة المطلقة لانحرافات قيم المقدر $\hat{\theta}_n$ عن المعلمة المراد تقديرها θ مقسوما على حجم العينة n .

وقد قام (Gao,2001) بدراسة الانحرافات المتوسطة للمقدر $\hat{\theta}_n$ للتوزيعات المستقلة والمتماثلة ، وقد وضع لدراسته مجموعة من الشروط والقواعد والتي يمكن الإفادة منها في هذه الدراسة وهي :-

الشرط الأول (ش١):

لكل $\theta \in \Theta$ ، وإمكانية وجود المشتقات التفاضلية الجزئية الثلاثة الأولى بالنسبة لـ θ أي أن:

$$T_k^{(i)}(x,\theta) = \frac{\partial^i \log f_k(x,\theta)}{\partial \theta^i} \quad , \quad i = 1,2,3 \quad , k = 1,2,...$$

الشرط الثاني (ش٢) :

لكل $\theta \in \Theta$ ، ووجود الجوار(**Neighborhood**) $N(\theta,\delta)(\delta > 0)$ ، والدوال $A_{ik}(x,\theta)$ وهي دوال غير سالبة ويمكن قياسها .

حيث إن :

$$N(\theta,\delta) = [\eta \in \Theta, |\eta - \theta| \le \eta], (\eta > 0)$$

و

$$\int A_{ik}(x,\theta) f_k(x,\theta) dx < \infty$$

و

$$\left| T_k^{(i)}(x,\theta) \right| \le A_{ik}(x,\theta) \quad , \quad \forall \delta \in N(\theta,\delta).$$

الشرط الثالث (ش٣):

لكل $F_k(x,\theta)$, $k \ge 1$, $\theta \in \Theta$ يمكن كتابة معلومات فيشر كما يلي :

$$0 < I_k(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial \log f_k(X_k,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 < \infty$$

الشرط الرابع (ش٤):

لكل $\theta \in \Theta$ يوجد $0 < v = v(\theta)$ و $\mu = \mu(\theta) > 0$

كما أن :

$$\sup_{k\geq 1} \sup_{(t,\varepsilon)\in[-\mu,\mu]\times[-v,v]} \phi_k(t,\theta,\varepsilon) < \infty$$

حيث :

$$\phi_k(t,\theta,\varepsilon) = E_\theta\{\exp[tT_k^{(1)}(X_k,\theta+\varepsilon)]\} \quad ,k = 1,2,...$$

الشرط الخامس (ش٥) :

لكل n $\quad \geq 1, \quad (x_1,x_2,...,x_n) \in (R^q)^n$ ، وبمساواة المشتقة التفاضلية الأولى للوغاريتم دالة الإمكان بالصفر فإن :

$$l^{(1)}(x_1,x_2,...,x_n,\theta) = 0$$

لها حل وحيد .

الشرط الأول (ش١*) :

لكل $0 < \delta$, $\theta \in \Theta$ نجد أن :

$$\sup_{k\geq 1} E_\theta \left|T_k^{(2)}(X_k,\theta)\right|^{1+\delta} < \infty.$$

الشرط الثاني (ش٢*) :

لكل $0 < \exists\delta$, $\theta \in \Theta$ نجد أن:

$$\sup_{k\geq 1} E_\theta[A_{3k}(X_k,\theta)]^{1+\eta} < \infty.$$
$$\sup_{k\geq 1} E_\theta[A_{1k}(X_k,\theta)]^{3+\eta} < \infty,$$

الشرط الثالث (ش٣*) :

لكل $\theta \in \Theta$ توجد دالة معلومات فيشر $I(\theta)$ حيث أن :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k(\theta) \to I_k(\theta) \qquad n \to \infty$$ وذلك عندما

$$0 < I(\theta) < \infty,$$

(قاعدة-١):

تحت الشروط الثلاثة الأولى السابقة، ولكل $k \ge 1$ فإن :

$$E_\theta[T_k^{(1)}(X_k,\theta)] = 0$$ و

$$E_\theta[T_k^{(2)}(X_k,\theta)] = -\, E_\theta[T_k^{(1)}(X_k,\theta)]^2 = -I_k(\theta)$$

(قاعدة-٢):

إذا كانت المتغيرات العشوائية $\{\xi_k, k \ge 1\}$ متمركزة في التوقعات ، و b_k سلسلة ثابتة كما أن $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{var}(\xi_k)}{b_k^2} < \infty$ ، فإن :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{b_n} \to 0 \qquad n \to \infty$$ عندما

وإثبات هذه القاعدة في (Loeve(1977,p.265.

(قاعدة-٣):

إذا كانت $\{\xi_k, k \ge 1\}$ سلسلة مستقلة، وكان $E|\xi_k|^{1+\delta} \le K < \infty$ لبعض $\delta > 0$ ، وكل $k \ge 1$ ،

والمجموعة $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ ، فإن :

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \to 0$$

(قاعدة-٤):

تحت الشروط من (ش١) : (ش٣) ، (ش١❖)، (ش٣❖) يكون لدينا :

$$1)\ \frac{1}{n}\sum_{k=m}^{m+n} T_k^{(1)}(X_k,\theta) \to 0, \forall m \geq 1, \forall \theta \in \Theta$$

عندما $n \to \infty$

$$2)\ G_n(x) = P_\theta[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=m}^{m+n} T_k^{(1)}(X_k,\theta) < x] \to \Phi[xI(\theta)], \forall m \geq 1, \forall \theta \in \Theta$$

عندما $n \to \infty$

حيث $\Phi(.)$ **هي دالة التوزيع الطبيعي القياسي .**

$3)\ p_n = [\lambda^2(n)t^2], q_n = [n/p_n]\ , r_n = n/[t\lambda(n)q_n].$ **ووضع** $\forall t > 0$

فإن:

$n \to \infty$ **عندما** $, j = 0,1,2,...$ (4)

$$\frac{p_n}{r_n\lambda^2(n)}\sum_{k=1}^{p_n} A_{3k+jp_n}(X_{k+jp_n},\theta) \to 0$$

و

$$\frac{1}{n}\sum_{k=p_nq_n+1}^{n} A_{3k}(X_k,\theta) \to 0 \qquad n \to \infty \text{ عندما} \qquad (5)$$

(قاعدة-٥):

تحت تحقق الشروط من (c.1) : (c.3) ، (❖c.1)، (❖c.3) يكون لدينا :

$$\forall m \geq 1, \tfrac{1}{n} \sum_{k=m}^{m+n} T_k^{(2)}(X_k, \theta) \to -I(\theta)$$ عندما $n \to \infty$

٢ – الهدف من البحث :

قام (Gao,2001) بدراسة الانحرافات المتوسطة للمقدر $\hat{\theta}_n$ للتوزيعات الاحتمالية المستقلة والمتماثلة ، ويهدف هذا البحث إلى دراسة الانحرافات المتوسطة للمقدر $\hat{\theta}_n$ للتوزيعات الاحتمالية المستقلة غير المتماثلة .

بفرض أن فراغ المعلمة Θ هو فترة مفتوحة من **R** ، ودوال توزيعاتها التراكمية هي $F_k(x,\theta)$ ، ودالة كثافة الاحتمال للمتغير X_k هي $f_k(x,\theta)$ ، وبفرض أن كل دالة كثافة تكون متصلة ، ويمكن إيجاد مشتقاتها التفاضلية حتى الدرجة الثالثة بالنسبة للمعلمة θ .

ليكن $\{\lambda(n), n \geq 1\}$ هي متتالية لأعداد غير سالبة حيث $\lambda(n) \to \infty$,

$$\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}} \to 0$$

وذلك عندما $n \to \infty$.

وبفرض أن $X, X_2, X_3, ..., X_n$ عينة عشوائية مستقلة مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله $f_k(x,\theta)$ ، ولوغاريتم هذه الدالة هو :

$$T_k(x,\theta) = \log f_k(x,\theta) \quad .$$

حيث θ هي معلمة التوزيع المراد تقديرها .

ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للعينة هي

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) == \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k, \theta)$$

ودالة الإمكان هي :

$$l(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=\log\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k,\theta)=\sum_{k=1}^{n} T_k(x_k,\theta).$$

ومقدر الإمكان الأكبر(MLE) للمعلمة θ هو $\hat{\theta}_n$ حيث :

$$\hat{\theta}_n=\theta_n(X_1,X_2,...,X_n)$$

ويتم الحصول عليه بحل المعادلة :

$$l^{(1)}(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[l(x_1,x_2,...,x_n,\theta)\right]=0 \quad ,n\geq 1$$

في هذا البحث سوف نتعرض لدراسة المتغيرات المستمرة فقط .

وللسهولة في استخدام الرموز نضع :

$$\overline{\theta}_n=\overline{\theta}_n(x_1,x_2,...,x_n)=\sup\{\theta\in\Theta, l^{(1)}(x_1,x_2,...,x_n\geq 0\},$$

وبالتالي فإن : $\underline{\theta}_n=\underline{\theta}_n(x_1,x_2,...,x_n)=\inf\{\theta\in\Theta, l^{(1)}(x_1,x_2,...,x_n\leq 0\}.$

$$\overline{\theta}_n(x_1,x_2,...,x_n). \qquad (1)$$
$$(x_1,x_2,...,x_n)\leq\underline{\theta}_n(x_1,x_2,...,x_n)\leq\hat{\theta}_n$$

ويجب أن يكون المقدر $\hat{\theta}_n$ متسقًا بمعنى أنه يقترب احتماليًا من المعلمة θ كلما كبر حجم العينة ،بمعنى أنه لأي مقدار ε صغير موجب فإن :

$$\lim_{n\to\infty}P_\theta[\left|\hat{\theta}-\theta\right|>\varepsilon]=0$$

ومن المعلوم أن :

$$.P_\theta[\left|\hat{\theta}-\theta\right|>\varepsilon]=P_\theta[\theta-\varepsilon\leq\hat{\theta}\leq\theta+\varepsilon]$$

حيث p_θ هي مقياس احتمالي للدالة :

$$\log\prod_{k=1}^{\infty} f_k(x_k,\theta)\mu(dx_k).$$

وعلى هذا يمكن القول بأن:

$$P_\theta(\underline{\theta}_n \ge \theta+\varepsilon) \le P_\theta\left[l^{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta+\varepsilon) \ge 0\right] \le P_\theta(\overline{\theta}_n \ge \theta+\varepsilon), \quad (2)$$

$$P_\theta(\overline{\theta}_n \le \theta-\varepsilon) \le P_\theta\left[l^{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta-\varepsilon) \le 0\right] \le P_\theta(\underline{\theta}_n \le \theta-\varepsilon) \quad (3)$$

(٣) الدراسة الحالية:

نظرية (١) :

(أ) بافتراض وجود الشروط من (ش١) : (ش٣) ، ومن(ش١*) :(ش٣*) ولأي $\varepsilon > 0$ فإن الانحرافات المتوسطة للمقدارين $\underline{\theta}_n, \overline{\theta}_n$ لتوزيعات احتمالية مستقلة، لأي مجموعة جزئية مفتوحة تكون احتماليًا أكبر من أو تساوي $-\frac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2$ كلما كبر حجم العينة أي أن :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\lambda(n)(\overline{\theta}_n - \theta) \ge \varepsilon] \ge -\tfrac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\lambda(n)(\underline{\theta}_n - \theta) \le -\varepsilon] \ge -\tfrac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2$$

(ب) بافتراض وجود الشروط من (ش١) : (ش٣) ، (ش٥) ، ومن(ش١*): (ش٣*) ولأي $\varepsilon > 0$ فإن الانحرافات المتوسطة للمقدر $\hat{\theta}_n$ لتوزيعات احتمالية مستقلة، لأي مجموعة جزئية مفتوحة تكون احتماليًا أكبر من أو تساوي $-\frac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2$ كلما كبر حجم العينة أي أن :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\lambda(n)\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \ge \varepsilon] \ge -\tfrac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2 .$$

الإثبات

من المعلوم لدينا أن :

$$P_\theta[\lambda(n)(\overline{\theta}_n-\theta)\geq\varepsilon]\geq P_\theta[\sum_{k=1}^{n}T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\geq 0] \tag{6}$$

وللسهولة في استخدام الرموز نضع :

$$T_k^{(1)}(\theta)=T_k^{(1)}(X_k,\theta) \quad \text{و} \quad A_{3k}(\theta)=A_{3k}(X_k,\theta).$$

وسوف نستخدم تلك الرموز في النتيجة التالية:

لكل $\eta>0$ ،

$$P_\theta[\sum_{k=1}^{n}T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\geq 0]$$

(7)

$$\geq P_\theta[\sum_{k=1}^{P_n}T_{k+jP_n}^{(1)}(\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\geq r_n\eta t,\ j=0,1,\dots,q_n-1,\left|\sum_{k=P_nq_n+1}^{n}T_{k+jP_n}^{(1)}(\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\right|\leq\frac{n\eta}{\lambda(n)}]$$

ونظرًا لاستقلال المتغيرات $(X_n, n\geq 1)$. فإنه يمكن كتابة المتباينة (7) على صورة المتساوية التالية :

$$P_\theta[\sum_{k=1}^{n}T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\geq 0]$$

$$=\prod_{j=0}^{q_n-1}P_\theta[\sum_{k=1}^{P_n}T_{k+jP_n}^{(1)}(\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\geq r_n\eta t]*P_\theta[\left|\sum_{k=P_nq_n+1}^{n}T_{k+jP_n}^{(1)}(\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\right|\leq\frac{n\eta}{\lambda(n)}]$$

وباستخدام معادلة تايلور لـ $T_k^{(1)}(\eta)$ في دالة الجوار $N(\theta,\gamma)$ نجد أن :

$$\left|T_k^{(1)}(\eta)-T_k^{(1)}(\theta)-(\eta-\theta)T_k^{(2)}(\theta)\right|\leq\tfrac{1}{2}(\eta-\theta)^2A_{3k}(\theta)$$

وعلى ذلك فإنه لأي $m\geq 1, l\geq 1$,

$$\left|\sum_{k=m}^{m+1}T_k^{(1)}(\theta+\tfrac{\varepsilon}{\lambda(n)})-\sum_{k=m}^{m+1}T_k^{(1)}(\theta)-\frac{\varepsilon}{\lambda(n)}\sum_{k=m}^{m+1}T_k^{(2)}(\theta)\right|\leq\frac{\varepsilon^2}{2\lambda^2(n)}\sum_{k=m}^{m+1}A_{3k}(\theta).$$

حيث :

$$\eta = (\theta + \tfrac{\varepsilon}{\lambda(n)})$$

ومن القاعدة (5) نجد أن :

$$\tfrac{1}{n} \sum_{k=p_n q_n+1}^{n} T_k^{(2)}(\theta) \to 0 \qquad n \to \infty \quad \text{عندما} \qquad (8)$$

مع ملاحظة أن :

$$n - p_n q_n \le t^2 \lambda^2(n),$$

$$n - p_n q_n \to 0,$$

$$\frac{\lambda(n)\sqrt{n - p_n q_n}}{n} \to 0$$

وذلك عندما $n \to \infty$.

وباستخدام نظرية النهاية المركزية ، نجد أن :

$$P_\theta \left| \sum_{k=P_n q_n+1}^{n} T_k^{(1)}(\theta) \right| \le \frac{n\eta}{\lambda(n)}] = p_\theta \left[\frac{1}{\sqrt{B_n(\theta)}} \left| \sum_{k=p_n q_n+1}^{n} T_k^{(1)}(\theta) \right| \le \frac{n\eta}{\sqrt{B_n(\theta)\lambda(n)}} \right] \to 1$$

حيث :

$$B_n(\theta) = \sum_{k=p_n q_n+1}^{n} I_k(\theta).$$

ومن خلال المعادلتين (8) و (5) والقاعدة (4) نجد أن :

$$P_\theta \left| \sum_{k=P_n q_n+1}^{n} T_k^{(1)}(\theta + \tfrac{\varepsilon}{\lambda(n)}) \right| \le \frac{n\eta}{\lambda(n)}] \to 1 \qquad . \; n \to \infty \quad \text{وذلك عندما} \quad (9)$$

ومن ناحية أخرى عندما $n \to \infty$ نجد أن :

$$\frac{t_n}{\sqrt{p_n}} \to 1 \qquad و \qquad \frac{r_n \lambda(n) t}{p_n} \to 1 \qquad و \qquad \frac{q_n}{(\frac{n}{\lambda^2(n)t^2})} \to 1$$

حيث :

$$r_n = \frac{n}{t\lambda(n) q_n}$$

وباستخدام القاعدة (4) مرة ثانية نحصل على :

$$P_\theta\left[\frac{1}{t_n}\sum_{k=1}^{p_n} T^{(1)}_{k+jp_n}(\theta) \geq \eta t\right] = P_\theta\left[\frac{1}{\sqrt{B^j_n(\theta)}}\sum_{k=1}^{p_n} T^{(1)}_{k+jp_n}(\theta) \geq \frac{t_n}{\sqrt{B^j_n(\theta)}}\eta t\right] \to 1-\Phi(\frac{\eta t}{\sigma_\theta})$$

حيث :

$$B^j_n(\theta) = \sum_{k=1}^{p_n} I_{k+jp_n}(\theta). \qquad و \qquad \sigma_\theta = \sqrt{I(\theta)}$$

ومن القاعدة (4) نجد أن :

$$\frac{1}{r_n \lambda(n) t}\sum_{k=1}^{p_n} T_{k+jp_n}(\theta) \to -I(\theta) \tag{10}$$

وباستخدام المعادلتين (10) ، (4) في القاعدة (4) نحصل على :

$$P_\theta\left[\sum_{k=1}^{p_n} T^{(1)}_{k+jp_n}(\theta + \tfrac{\varepsilon}{\lambda(n)}) \geq r_n \eta t\right] \to 1-\Phi(\frac{t[\eta + I(\theta)\varepsilon]}{\sigma_\theta}).\ n \to \infty \quad \text{عندما} \tag{11}$$

وباتحاد المعادلات (6) ، (7) ، (9) ، (11) نحصل على :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n}\log P_\theta[\sum_{k=1}^{n} T^{(1)}_k(\theta + \tfrac{\varepsilon}{\lambda(n)}) \geq 0] \geq \frac{1}{t}\log\left\{1-\Phi[\frac{t(\eta + I(\theta)\varepsilon}{\sigma_\theta}]\right\}.$$

وبوضع $\eta \to 0$ ، $t \to \infty$ والتطبيق في المتباينة التالية :

$$1-\Phi(a) \geq \frac{a}{(a^2+1)\sqrt{2\Pi}e^{\frac{a^2}{2}}}, \qquad \forall a > 0$$

نحصل على :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\sum_{k=1}^{n} T_k^{(1)}(\theta + \tfrac{\varepsilon}{\lambda(n)}) \geq 0] \geq -\frac{1}{2} I(\theta)\varepsilon^2.$$

وبهذا نكون قد أثبتنا الجزء الأول في النظرية ويمكن إثبات الجزء الثاني بنفس الطريقة.

نظرية (٢) :

(أ)) بافتراض وجود الشروط من (ش١) : (ش٤) ، ومن(ش١❖) : (ش٣❖) ولأي $\varepsilon > 0$ فإن الانحرافات المتوسطة للمقدارين $\underline{\theta}_n, \overline{\theta}_n$ لتوزيعات احتمالية مستقلة، لأي مجموعة جزئية مغلقة تكون احتماليًا أقل من أو تساوي $-\frac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2$ كلما كبر حجم العينة أي أن :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\lambda(n)(\underline{\theta}_n - \theta) \geq \varepsilon] \leq -\tfrac{1}{2} I(\theta)\varepsilon^2 \quad .$$

و

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\lambda(n)(\overline{\theta}_n - \theta) \leq -\varepsilon] \leq -\tfrac{1}{2} I(\theta)\varepsilon^2 \, .$$

(ب)) بافتراض وجود الشروط من (ش١) : (ش٥) ، ومن(ش١❖) : (ش٣❖) ولأي $\varepsilon > 0$ فإن الانحرافات المتوسطة للمقدر $\hat{\theta}_n$ لتوزيعات احتمالية مستقلة، لأي مجموعة جزئية مغلقة تكون احتماليًا أقل من أو تساوي $-\frac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2$ كلما كبر حجم العينة أي أن :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\lambda(n)\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geq \varepsilon] \leq -\tfrac{1}{2} I(\theta)\varepsilon^2 \, .$$

الإثبات

$$P_\theta[\lambda(n)(\underset{-n}{\theta}-\theta)\geq\varepsilon]\leq P_\theta[\sum_{k=1}^{n}T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\geq 0]$$

$$\leq E_\theta[\exp\left\{\frac{t}{\lambda(n)}[\sum_{k=1}^{n}T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\right\}]$$

$$=\prod_{k=1}^{n}E_\theta[\exp\left\{\frac{t}{\lambda(n)}T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\right\}]$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\{1+\frac{t}{\lambda(n)}E_\theta[T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})]$$

$$+\frac{t^2}{2\lambda^2(n)}E_\theta\left\langle T_k^{(1)}(X_k,\theta+\frac{\varepsilon}{\lambda(n)})\right\rangle^2+O(\frac{1}{\lambda^3(n)})\}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left\{1+\frac{1}{\lambda^2(n)}\left(\frac{t^2I_k(\theta)}{2}-t\varepsilon I_k(\theta)\right)+O(\frac{1}{\lambda^3(n)})\right\}.$$

ومن ثم فإنه لأي $t\geq 0$ نجد أن :

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda^2(n)}{n}\log P_\theta[\lambda(n)(\underset{-n}{\theta}-\theta)\geq\varepsilon]$$

$$\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda^2(n)}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\{1+\frac{1}{\lambda^2(n)}\left(\frac{t^2I_k(\theta)}{2}-t\varepsilon I_k(\theta)\right)+O(\frac{1}{\lambda^3(n)})\}$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda^2(n)}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\{\frac{1}{\lambda^2(n)}\left(\frac{t^2I_k(\theta)}{2}-t\varepsilon I_k(\theta)\right)+O(\frac{1}{\lambda^3(n)})\}$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I_k(\theta)\left(\tfrac{t^2}{2}-t\varepsilon\right).$$

وبناء عليه نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{\lambda^2(n)}{n}\log P_\theta[\lambda(n)(\underset{-n}{\theta}-\theta)\geq\varepsilon]\leq-\tfrac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2\ .$$

وبهذا نكون قد أثبتنا المتباينة الأولى في الجزء الأول من النظرية (٢) ويمكن إثبات المتباينة الثانية بنفس الطريقة ، كما يمكن إثبات الجزء الثاني من النظرية (٢) بنفس الطريقة .

نظرية (٣) :

بافتراض وجود الشروط من (ش١) : (ش٥) ، ومن(ش١*) : (ش٣*) ،

ووضع $I(x,\theta)=\frac{1}{2}I(\theta)x^2$ نجد أنه لأي مجموعة جزئية مغلقة $F\subset\Theta$ ،

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{\lambda^2(n)}{n}\log P_\theta[\lambda(n)\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\in F]\leq-\inf_{x\in F}I(x,\theta),$$

ولأي مجموعة جزئية مفتوحة $G\subset\Theta$ نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{\lambda^2(n)}{n}\log P_\theta[\lambda(n)\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\in G]\geq-\inf_{x\in G}I(x,\theta),$$

حالة خاصة ،لأي $\varepsilon>0$ نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^2(n)}{n}\log P_\theta[\lambda(n)\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon]=-\tfrac{1}{2}I(\theta)\varepsilon^2.$$

يمكن إثبات هذه النظرية بنفس الطريقة التي أثبت بها **Gao** (2001). نظريته رقم (٣) .

مثال :

بفرض أن $Y_i, i\geq 0$ تمثل متغيرات حياة ، وتوزيعها المشترك مستقل ومتماثل ، ودالة التوزيع الاحتمالي المشترك لها هي $F(y,\theta)$ ، ودالة كثافتها الاحتمالية هي $f(y,\theta)$ حيث $\theta\in\Theta$ و Θ تمثل فترة مفتوحة من **R** ، وبفرض أن المتغيرات $U_i, i\geq 1$ مستقلة وغير متماثلة ، وتوزيعها الاحتمالي المشترك $G_i(u)$.

ليكن $\alpha_i = I_{[Y_i < U_i]}$ ، $i \geq 1$ ،

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } Y_i < U_i \text{ ، والقيمة الحقيقية لـ } Y_i \text{ غير مشاهدة .} \\ 1 & \text{خلاف ذلك .} \end{cases}$$

$$Z_i = \begin{cases} Y_i & \text{إذا كان } \alpha_i = 1, \delta_i = 1 . \\ U_i & \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

هذا النموذج تم دراسته في (1988) **Elperin and Gertsbak** .

ليكن $\overline{F}(x,\theta) = 1 - F(x,\theta)$. تشير إلى لوغاريتم دالة الإمكان للمشاهدات $Z_i, \alpha_i, \delta_i, i = 1,2,...,n$

ونحصل عليها بواسطة :

$$l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i \delta_i \log f(z_i) + \alpha_i (1-\delta_i) \log F(z_i,\theta) + (1-\alpha_i) \log \overline{F}(z_i,\theta)]. \quad (12)$$

لآن نقدم مجموعة شروط الانتظام التالية :

الشرط الأول : دالة الكثافة $f(x,\theta)$ موجبة على الفترة $(0,\infty) \times \Theta$ ، والمشتقة التفاضلية الثالثة $\frac{\partial^3 f(x,\theta)}{\partial \theta^3}$ تكون متصلة في θ .

الشرط الثاني : $\forall \theta \in \Theta$ ، ووجود دالة الجوار لـ θ ،

$$N(\theta,\delta) = [\eta \in \Theta, |\eta - \theta| \leq \eta], (\eta > 0)$$

وبعض الدوال من **x** ، كما أنه $\forall \eta \in N(\theta,\eta)$ فإن :

$$\left|\frac{\partial^2 f(x,\eta)}{\partial \eta^2}\right| \le A_1(x), \qquad \int_0^\infty A_1(x)dx < \infty,$$

$$\int_0^\infty A_2^2(x) f(x,\theta)dx < \infty,$$

$$\left|\frac{\partial^2 \log f(x,\eta)}{\partial \eta^2}\right| \le A_2(x),$$

$$\left|\frac{\partial^2 \log F(x,\eta)}{\partial \eta^2}\right| \le A_3(x), \qquad \sup_{x\ge 0} A_3^2(x)F(x,\eta) \le M < \infty,$$

$$\sup_{x\ge 0} A_4^2(x)\overline{F}(x,\eta) \le M < \infty.$$

$$\left|\frac{\partial^2 \log \overline{F}(x,\eta)}{\partial \eta^2}\right| \le A_4(x),$$

الشرط الثالث : لأي $\theta \in \Theta$ ،

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^4 f(x,\theta)dx < \infty$$

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta}\right| dx < \infty,$$

وعندما $x \to \infty$ **أو** $x \to 0$ **فإن :**

$$\left(\frac{\partial \log F(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^4 F(x,\theta) \to 0,$$

$$\left(\frac{\partial \log \overline{F}(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^4 \overline{F}(x,\theta) \to 0,$$

الشرط الرابع : معادلة الإمكان $\frac{\partial l_n(\theta)}{\partial(\theta)} = 0$ **لها حل وحيد** $\hat{\theta}_n$.

الشرط الخامس : يجب معرفة توزيع $G(x)$ **كما أن :**

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i(x) = G(x).$$

الشرط السادس : لكل $\theta \in \Theta$ يوجد $v = v(\theta) > 0$ و $\mu = \mu(\theta) > 0$

كما أن :

$$\sup_{k\geq 1} \sup_{(t,\varepsilon)\in[-\mu,\mu]\times[-v,v]} \phi_k(t,\theta,\varepsilon) < \infty$$

حيث :

$$\phi_k(t,\theta,\varepsilon) = E_\theta\{\exp[tT_k^{(1)}(X_k,\theta+\varepsilon)]\} \qquad ,k = 1,2,...$$

و

$$T_k^{(1)}(x,\theta) = \alpha_k\eta_k \frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta} + \alpha_k(1-\eta_k)\frac{\partial \log F(x,\theta)}{\partial\theta} + (1-\alpha_k)\frac{\partial \log \overline{F}(x,\theta)}{\partial\theta}.$$

تحت الشروط الستة السابقة، ستتحقق افتراضات نظرية(٣). وباستخدام نتائج **Song et al (2003)** ونظرية (٣) ، نحصل على :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^2(n)}{n} \log P_\theta[\lambda(n)\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geq \varepsilon] = -\tfrac{1}{2} I(\theta)\varepsilon^2, \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ .}$$

(٤)النتائج والتوصيات :

تناول هذا البحث دراسة الانحرافات المتوسطة لمقدر الإمكان الأكبر لتوزيعات مستقلة في دراسته.Gao وغير متماثلة ، وذلك تحت تحقق الشروط ، والقواعد التي استخدمها.

كما أن البحث تركزت دراسته على التوزيعات المستمرة (المتصلة)، لذا يوصي الباحث بدراسة هذا الموضوع في حالة التوزيعات المتقطعة (المنفصلة).

(٥) مراجع البحث:

أولاً : المراجع العربية :

١)الصيـاد ، جـلال مصـطفى .(١٩٩٣م)- الاسـتدلال الإحصائـي – دار المريـخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية.

٢)البشـير، زين العابديـن عبـد الرحيـم، عودة أحمـد عـودة عبـد المجيـد (١٩٩٧م) – الاستـدلال الإحصائي ـ جامعة الملك سعود، الرياض ،المملكة العربية السعودية .

ثانيًا: المراجع الأجنبية:

3) Chao, 1976 Chao, M.T., Strong Consistency of Maximum Llikelihood Estimators when the Observations are Independent but not Identically Distributed. Dr.Y.W. Chen's 60-year Memorial Volume. (1976), Academia Sinica, Taipei.

4) Elperin and Gertsbak, T. Elperin and I. Gertsbak, (1988), Estimation in a Random Censoring Model with Incomplete Information: Exponential Lifetime Distribution, IEEE Trans. Rel.37 (1988) (2), pp. 223–229.

5) Gao, (2001) F.Q. Gao, Moderate Deviations for the Maximum Likelihood Estimator, Statist. Probab. Lett. 55 (2001), pp. 345–352.

6) Hoadley, A.B. Hoadley, Asymptotic Properties of Maximum Estimators for the Independent not Identically Distributed Case, Ann. Math. Statist. 42 (1971), pp. 1977–1991.

7) Loève, M. Loève, Probability Theory I, Springer, New York (1977).

8) Nelder and Wedderburn, Nelder, J.A., Wedderburn, R.W.M., Generalized linear models. J. Roy. Statist. Soc. Ser. A, 135–384, (1972).

9) Song et al., 2003 Song, Yi-jun, Li and Bu-xi, Consistency and Asymptotic Normality of MLE for Random Censoring Model with Incomplete Information, Appl. Probab. Statist. 19 (2003) (2), pp. 139–149 (Ch). Stout and William, 1974 Stout and F. William, Almost Sure Convergence, Academic Press, New York (1974).